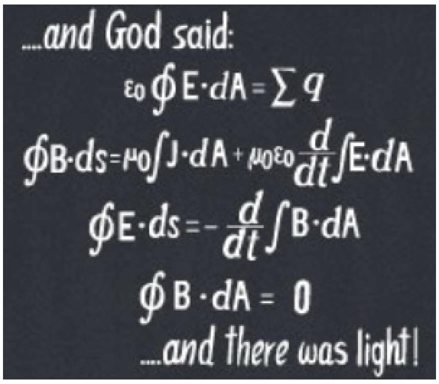
統合自然科学科　第４学期　電磁気学（担当：鳥井）　レポート問題４

出題：10 月 30 日　締切：11 月 6 日授業開始前

1. ファインマン物理学（英語版では Vol. II, Chap. 27-4）で紹介されているテクニックを用いて、以下のベクトルの微分公式を導出せよ。

$$(1)\nabla\varphi\psi=\psi\nabla\varphi+\varphi\nabla\psi$$
$$(2)\nabla\cdot\left(\varphi\boldsymbol{A}\right)=(\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{A}+\varphi(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$$
$$(3)\nabla\times\left(\varphi\boldsymbol{A}\right)=(\nabla\varphi)\times\boldsymbol{A}+\varphi(\nabla\times\boldsymbol{A})$$
$$(4)\nabla\cdot\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$
$$(5)\ \nabla\times\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}+(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

2. MIT の COOP（生協）で売っていた T シャツには右のように４つのマクスウェル方程式が積分形で書かれている。T シャツの式中の dA は講義で $d\mathbf{S}$ と表してきた面素ベクトルの意味である。また ds は講義で $d\mathbf{r}$ と表してきた微小変位ベクトルの意味である。各記号がベクトルなのかスカラーなのかは明確に区別しなければならならず、その意味で、この T シャツの式はあまり正確ではない。微小変位を $d\mathbf{r}$、面素ベクトルを $d\mathbf{S}$ として、“正確な”マクスウェル方程式の積分形をすべて書き下せ。ただし、電荷の和は電荷密度 ρ を用いて表現し、電流密度には記号 $\boldsymbol{j}$（小文字の j の太字）を用いよ。



3. マクスウェル方程式の微分形（左）が積分形と同値であることは、ガウスの定理やストークスの定理を用いて容易に証明できる。微分形のマクスウェル方程式のうち１つ（もしくは４つ全て）を選び、積分形と同値であることを実際に証明せよ。

<u>マクスウェル方程式（微分系）</u>

$$\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$
$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$$

4. $\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ は変位電流密度と呼ばれ、マクスウェルによって 1865 年に導入された。さて、面積 S、間隔 d の平行平板コンデンサに電流 I が流れ込んでいるとする。このとき、コンデンサ内の変位電流（変位電流密度の大きさに面積 S をかけたもの）が電流 I に等しいことを証明せよ。

5. （参考課題）レビ・チビタ（Levi-Civita）記号を用いると、デカルト座標の基底ベクトル間の関係を $\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k$ と表すことができる（1, 2, 3 はそれぞれ x、y、z を意味する）。以下のベクトル公式をレビ・チビタ記号の性質を利用して証明せよ（必要に応じて公式 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$ を用いよ）。

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$$
$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$