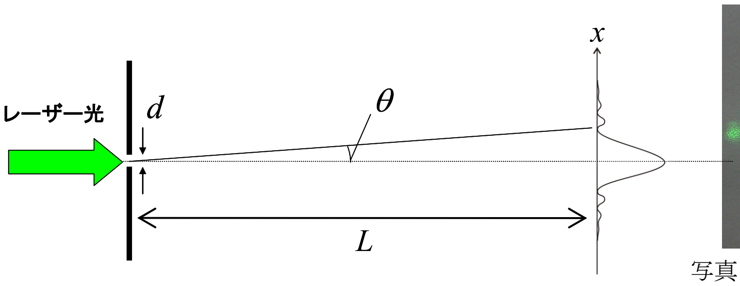
統合自然科学科　第4学期　電磁気学（担当：鳥井）　レポート問題3

出題： 10月23日　締切：年10月30日授業開始前

1. 波長λのレーザー光を幅dの単スリットに照射したら、距離Lだけ離れたスクリーンに写真のような回折パターンが現れた。この回折パターンを、スリットの各点から素元波が出ているとするホイヘンスの原理を用いて説明したい。ただし、スクリーンまでの距離Lはスリット幅dに比べて十分長いとする。
   - ① そもそもこの問題にホイヘンスの原理を適用してよい理論的根拠を述べよ
   - ② ホイヘンスの原理を用いて、回折角θ（下図のように最初に暗部になるような光線の角度）を求めよ
   - ③ ホイヘンスの原理を用いて回折パターンの具体的な関数形を求めよ。観測されるパターンは光の強度であり、光電場の自乗に比例することに注意せよ。



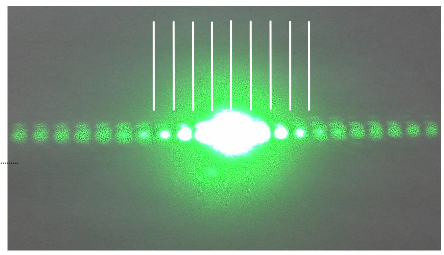


写真　単スリットの回折パターン（写真では中心が明るすぎて、最初の暗部は確認できない）

2. 任意のスカラー場ϕに対して$\nabla\times(\nabla\varphi)=\vec{0}$、任意のベクトル場$\boldsymbol{A}$に対して$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$となることを、ガウスの定理やストークスの定理を用いて幾何学的に証明せよ（ファインマン物理学III「電磁気学」第3章7節参照）。

3. ストークスの定理$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}$における線積分の経路を$xy$平面（$z=0$面）に限定したとする。このとき、$d\boldsymbol{r}=(dx,dy,0)$、$\int_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{A})_z\,dxdy$とかけることに注意して、以下のグリーンの定理を証明せよ。

閉曲線Cの内部を領域 D とする。Cおよび内部 D において、関数$P(x,y)$と$Q(x,y)$が連続な偏導関数をもつとする。このとき、次が成り立つ。 $$\oint_C(Pdx+Qdy)=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$（グリーンの定理）

4. （参考課題）領域 D で正則な関数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$がコーシーの積分定理$\oint_C f(z)dz=0$（経路Cは領域D内の閉曲線）を満たすことを上記のグリーンの定理およびコーシー・リーマンの関係式$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$、$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$を用いて証明せよ。