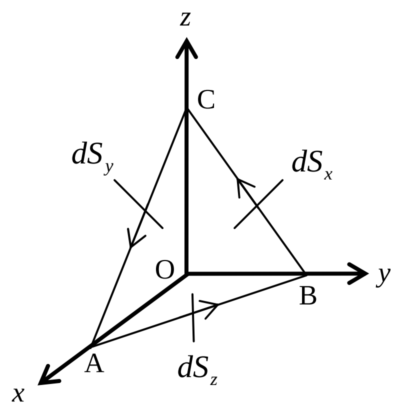
統合自然科学科　第４学期　電磁気学（担当：鳥井）　レポート問題２

出題： 10 月 16 日　締切：年 10 月 23 日授業開始前

1.　$\boldsymbol{r}=(x,y,z),\ r\equiv|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする。次の計算をせよ（$\boldsymbol{r}\neq 0$ とする）。

（１）$\nabla\dfrac{1}{r}$　（２）$\nabla\times\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$　（３）$\nabla\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$　（４）$\nabla\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}$　（５）$\nabla\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$

2.　図のような微小な三角形 ABC の周囲を経路とするベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の循環 $\oint_{\mathrm{ABC}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ を考える。三角形 ABC の面積を dS、三角形 ABC を yz 平面に射影した（三角形 BCO の）面積を dS_x、xz 平面に射影した（三角形 CAO の）面積を dS_x、xy 平面に射影した（三角形 ABO の）面積を dS_z とする。



（１）　三角形 ABC の法線ベクトル $\boldsymbol{n}=(n_x,n_y,n_z)$ が

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{dS_x}{dS},\frac{dS_y}{dS},\frac{dS_z}{dS}\right)$$

と書き表せることを示せ（ヒント：例えば法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と x 軸とのなす角を θ とすると、$n_x=\cos\theta$）。

（２）　三角形 ABC の循環は、三角形 BCO の循環と三角形 CAO の循環と三角形 ABO の循環の和に等しい。その理由を説明せよ。

（３）　（４）で証明されるように、三角形 BCO、三角形 CAO、三角形 ABO の循環は、それぞれの三角形の面積 dS_x, dS_y, dS_z に比例する。それぞれの三角形の<u>単位面積あたりの</u>循環を $(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_x, (\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_y, (\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_z$ と便宜的に書き表すことにする。このとき、三角形 ABC の循環は $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$ と書き表せることを示せ。ただし、$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\equiv\left((\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_x,(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_y,(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_z\right)$、$d\boldsymbol{S}\equiv\boldsymbol{n}dS$ は三角形 ABC の面素ベクトルである。

（４）　$(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_x, (\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_y, (\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_z$ の具体的な表現を循環の定義に基づいて導出し（計算には微小な三角形ではなく、微小な正方形を考えるとよい）、$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ と外積で書き表せることを示せ（このように、外積は奇跡的に便利なものである）。