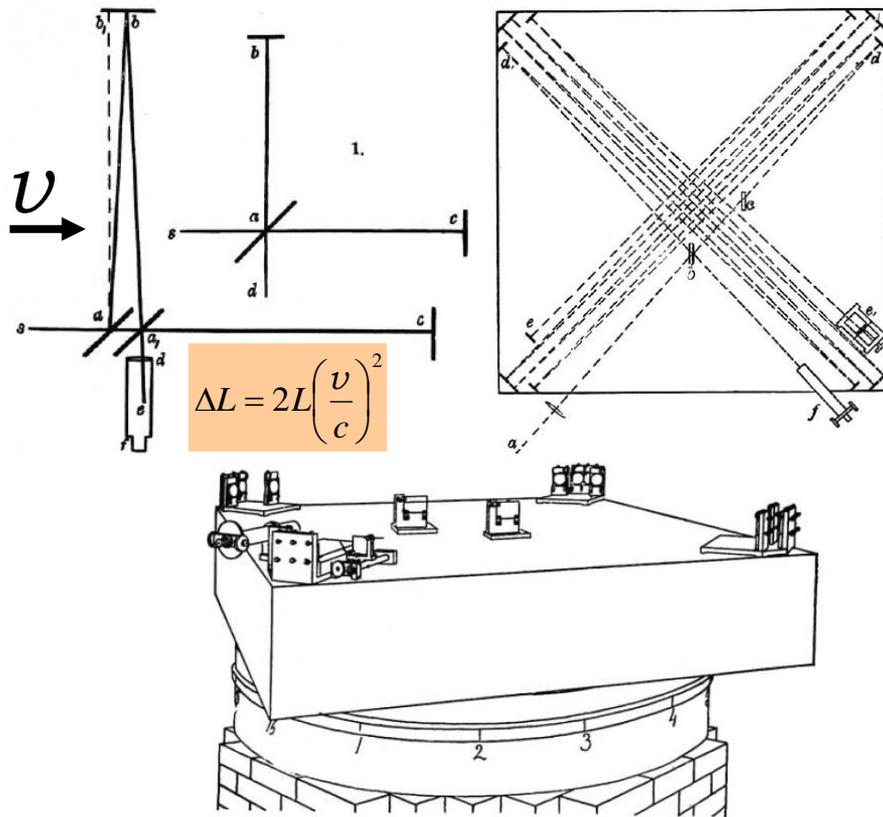
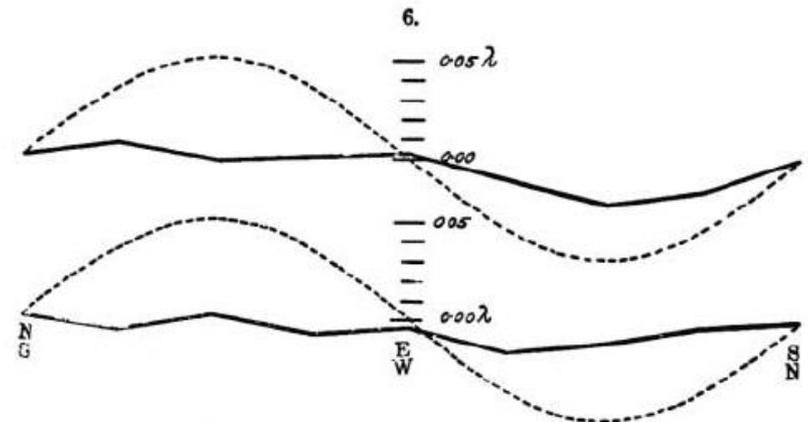


特殊相對性理論

マイケルソン・モーレーの実験(1887)



The results of the observations are expressed graphically in fig. 6. The upper is the curve for the observations at noon, and the lower that for the evening observations. **The dotted curves represent one-eighth of the theoretical displacements.** It seems fair to conclude from the figure that if there is any displacement



placement due to the relative motion of the earth and the luminiferous ether, this cannot be much greater than 0.01 of the distance between the fringes.

<http://www.aip.org/history/exhibits/gap/PDF/michelson.pdf>

地球上の光速は光の進行方向に依存しなかった！

Einstein 1905 年論文 「運動物体の電気力学について」

3. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper;* *von A. Einstein.*

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

ON THE ELECTRODYNAMICS OF MOVING BODIES

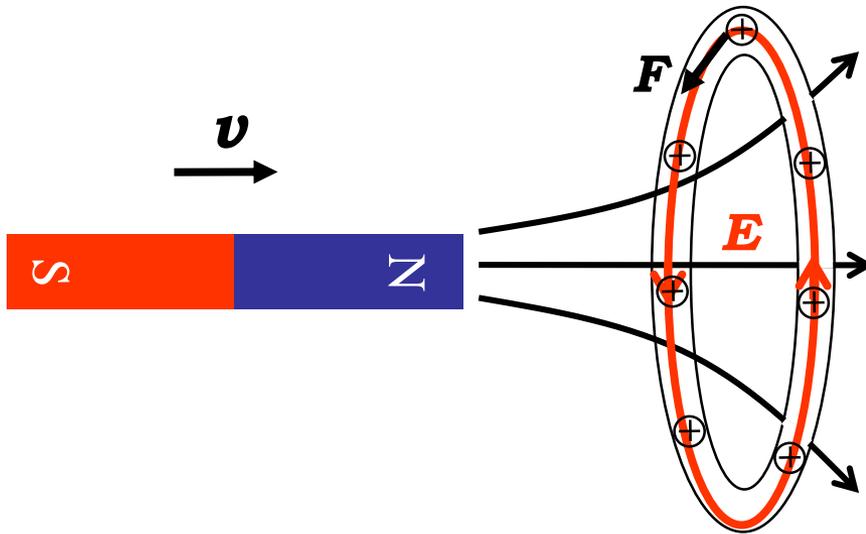
BY A. EINSTEIN

June 30, 1905

It is known that Maxwell's electrodynamics—as usually understood at the present time—when applied to moving bodies, leads to asymmetries which do not appear to be inherent in the phenomena. Take, for example, the reciprocal electrodynamic action of a magnet and a conductor. The observable phenomenon here depends only on the relative motion of the conductor and the magnet, whereas the customary view draws a sharp distinction between the two cases in which either the one or the other of these bodies is in motion. For if the magnet is in motion and the conductor at rest, there arises in the neighbourhood of the magnet an electric field with a certain definite energy, producing a current at the places where parts of the conductor are situated. But if the magnet is stationary and the conductor in motion, no electric field arises in the neighbourhood of the magnet. In the conductor, however, we find an electromotive force, to which in itself there is no corresponding energy, but which gives rise—assuming equality of relative motion in the two cases discussed—to electric currents of the same path and intensity as those produced by the electric forces in the former case.

誘導電流の起源①

磁石がコイルに対して動く場合



磁場が時間変化している空間には、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

を満たす誘導電場が生じる

誘導起電力Vは、

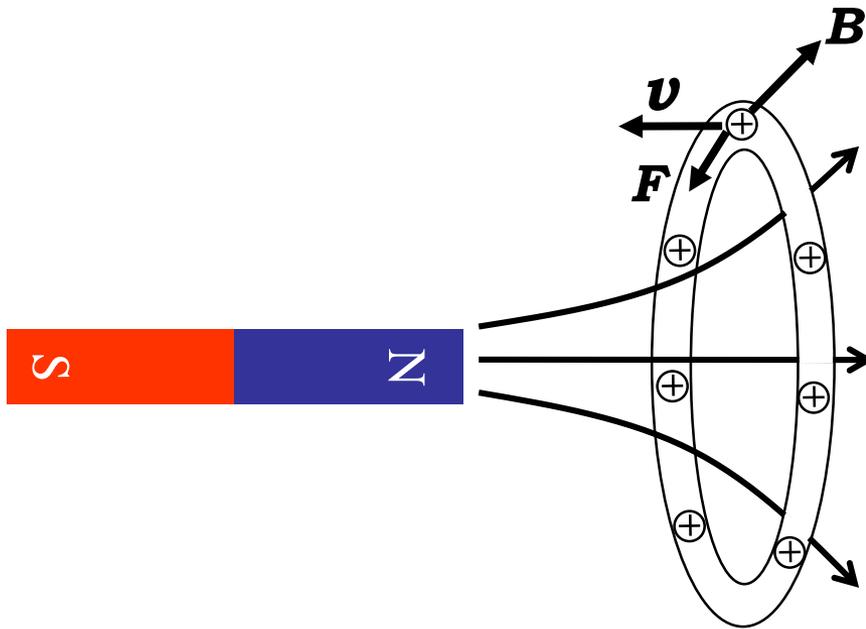
(ストークスの定理)

$$\begin{aligned} V &= \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{電磁誘導の法則}) \\ &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{aligned}$$

レンツの法則

誘導電流の起源②

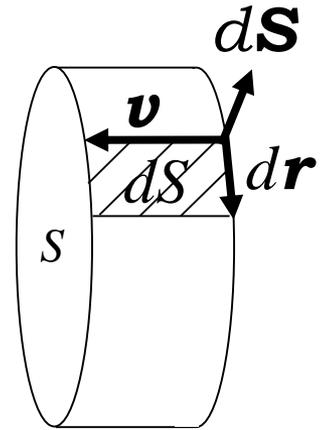
コイルが磁石に対して動く場合



運動するコイル内の電荷には
ローレンツ力

$$F = qv \times B$$

が働く

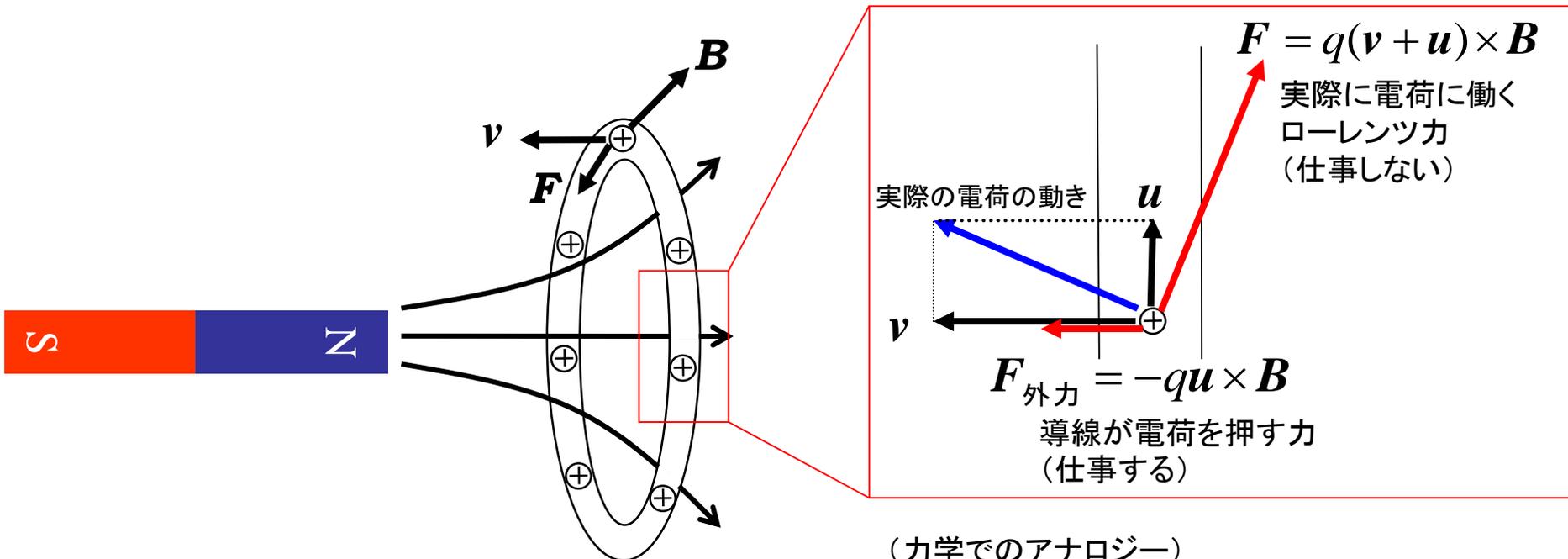


誘導起電力 V は、

$$\begin{aligned} V &\equiv \frac{1}{q} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{r}) = - \int_{\text{コイルが1秒間に掃く面}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{aligned}$$

レンツの法則

(脱線) 磁場は電荷に仕事しないはず ではなかったか？



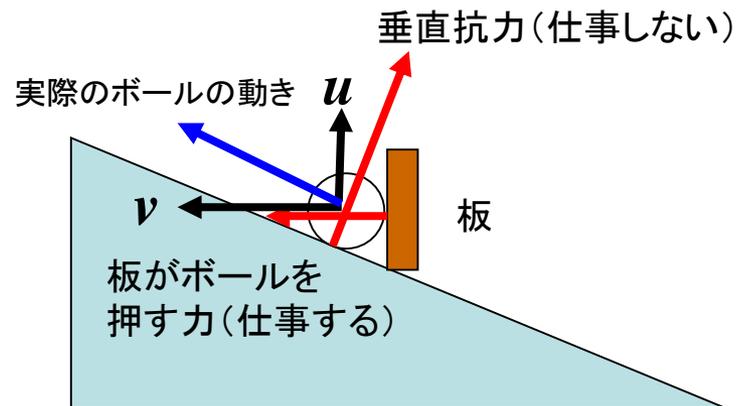
電荷を動かして続けるために必要な仕事
(導線が電荷を推す仕事)は単位時間あたり

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{\text{外力}} = -q\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

$$= \mathbf{u} \cdot (q\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

ローレンツ力(の導線に平行な成分)が仕事をするように見える

(力学でのアナロジー)



アインシュタインが掲げた2つの仮説

Examples of this sort, together with the unsuccessful attempts to discover any motion of the earth relatively to the “light medium,” suggest that the phenomena of electrodynamics as well as of mechanics possess no properties corresponding to the idea of absolute rest. They suggest rather that, as has already been shown to the first order of small quantities, the same laws of electrodynamics and optics will be valid for all frames of reference for which the equations of mechanics hold good. We will raise this conjecture (the purport of which will hereafter be called the “Principle of Relativity”) to the status of a postulate, and also introduce another postulate, which is only apparently irreconcilable with the former, namely, that light is always propagated in empty space with a definite velocity c which is independent of the state of motion of the emitting body. These two postulates suffice for the attainment of a simple and consistent theory of the electrodynamics of moving bodies based on Maxwell’s theory for stationary bodies. The introduction of a “luminiferous ether” will prove to be superfluous inasmuch as the view here to be developed will not require an “absolutely stationary space” provided with special properties, nor

[Annalen der Physik 322, 891–921\(1905\)](#)

<http://www.fourmilab.ch/etexts/einstein/specrel/www/>

特殊相対性理論

＜二つの基本原理＞

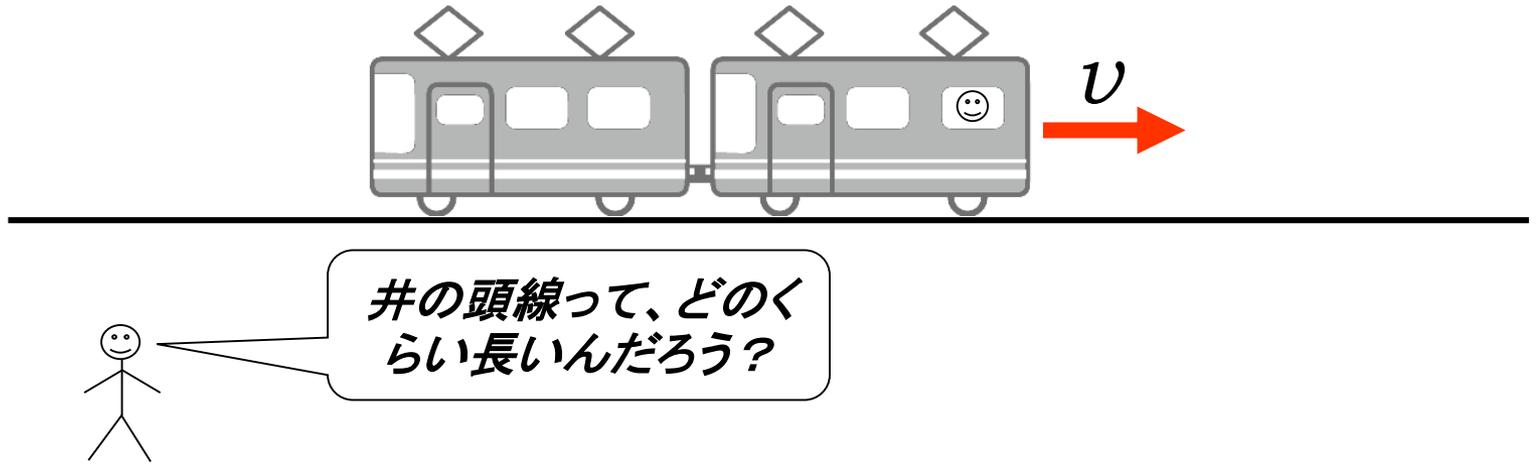
- 物理法則はすべての慣性系に対して同じ形で表される(相対性原理)
- 真空中の光の速さは光源の運動状態に無関係である(光速不変の原理)

特殊相対性理論からの奇妙な帰結

- ローレンツ収縮 (動いている物の長さは縮む)
- 時間の遅れ (動いている時計は遅れる)
- 同時刻の相対性 (2つの事象が同時かどうかは、観測者の運動に依存する)
- 質量の増大 (質量とエネルギーの等価性)

すべて**測定の方法**を定義してはじめて理解できる。

(例) 速さ v で動いている列車の長さを
どのように測るか？



~~「列車と一緒に走りながら測る」~~

~~「列車が駅に止まっているすきに測る」~~

~~「列車に乗っている人に測ってもらう」~~

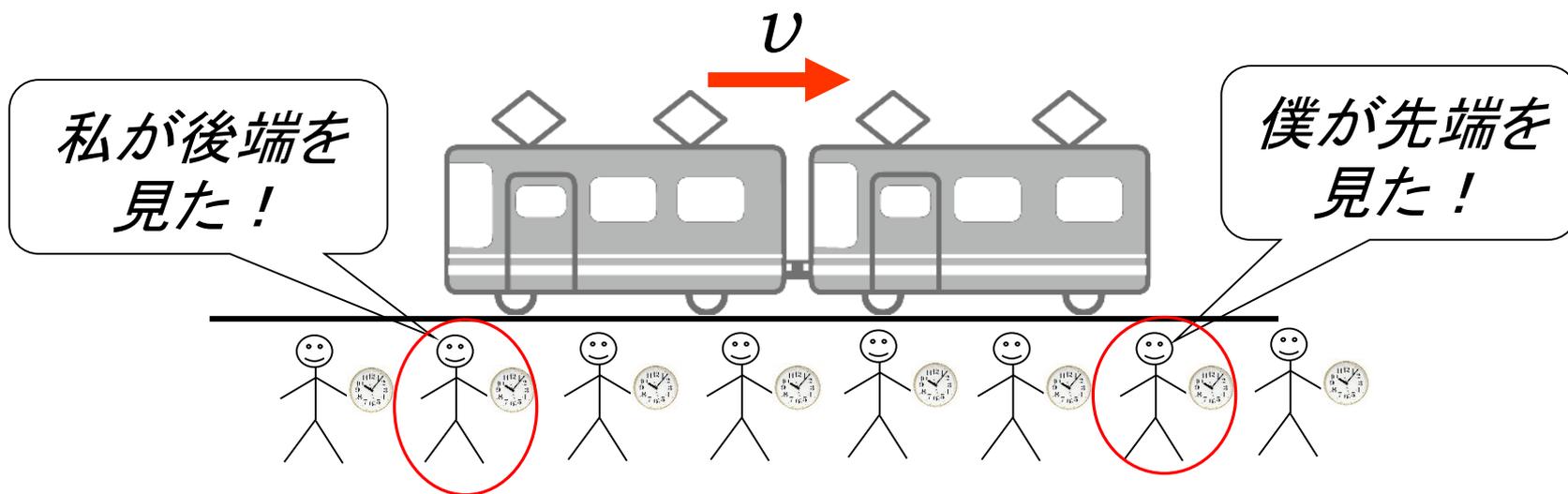
(相対論的に)正しい測定法その1



時計を持ってある地点で待ち構え、列車の先端と後端が通過する時刻を測定する

$$(\text{列車の長さ}) = (\text{速さ}) \times (\text{通過時間}) = v (t_2 - t_1)$$

(相対論的に)正しい測定法その2

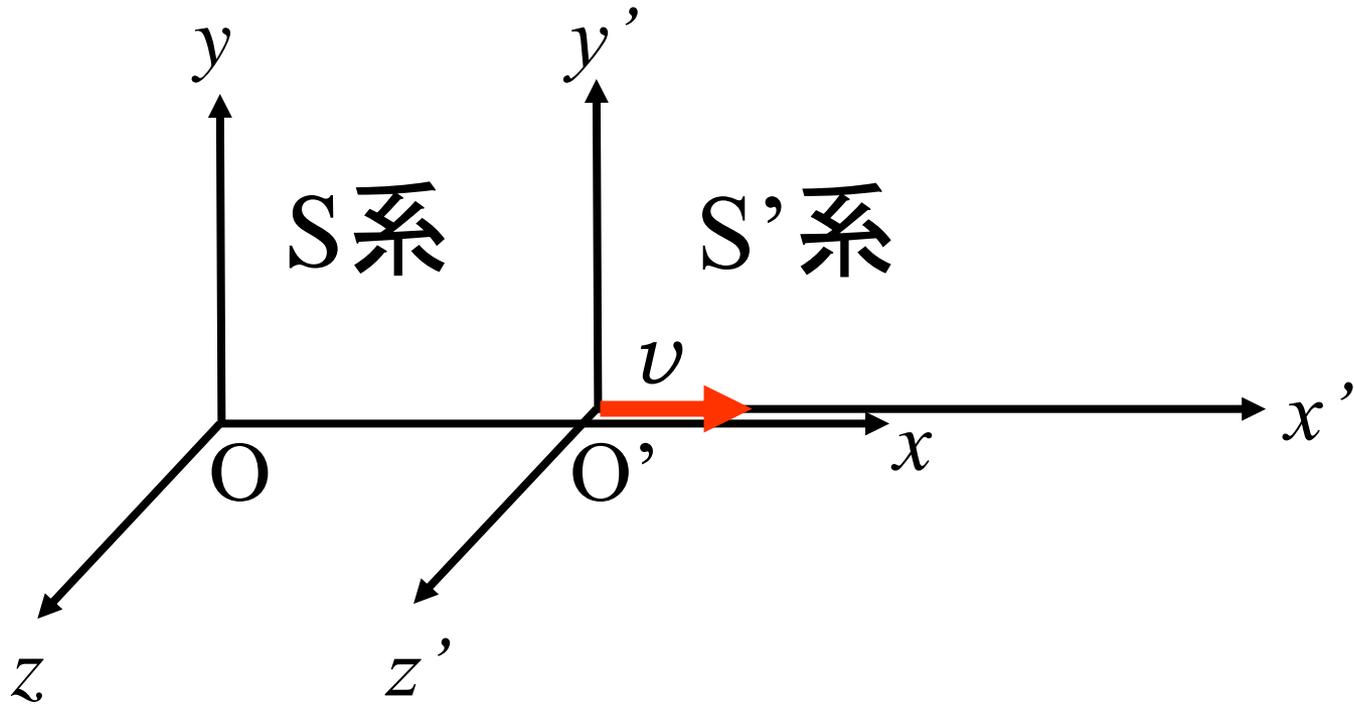


全員が時計を持ち、線路上の様々な地点で待ち構える。同時刻に列車の先端と後端を見た観測者(の座標)を教えてください。

$$(\text{列車の長さ}) = (\text{先端の座標}) - (\text{後端の座標})$$

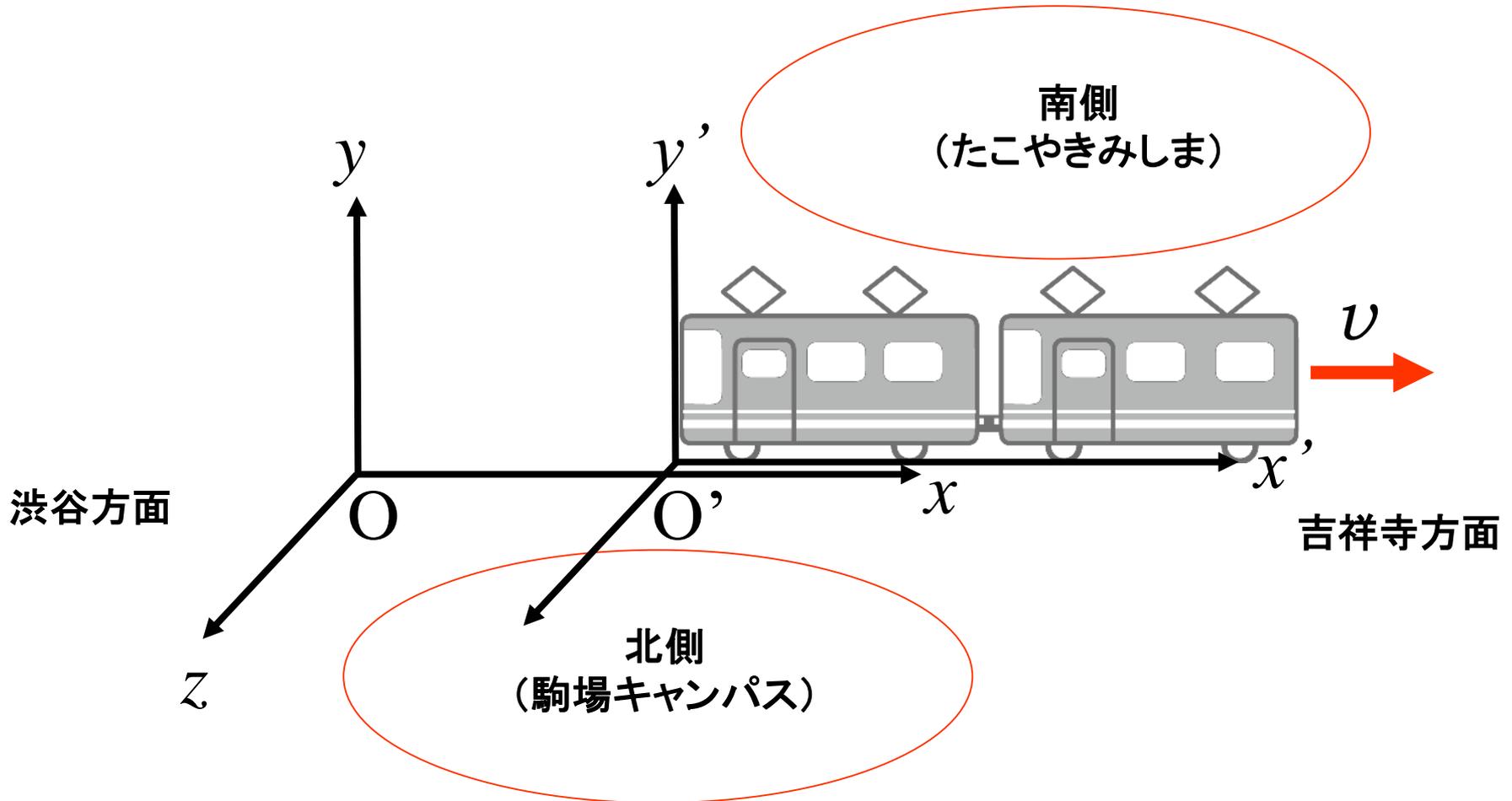
同時刻における

二つの慣性系



S'系はS系に対して x 軸正の方向に速さ v で移動している

二つの慣性系 (イメージ重視)



井の頭線は我々 (駒場キャンパス) に対して吉祥寺の方向に速さ v で移動している

その他...

地図

航空写真

Earth

駒場キャンパス (正門)



たこやきみしま

問題提起

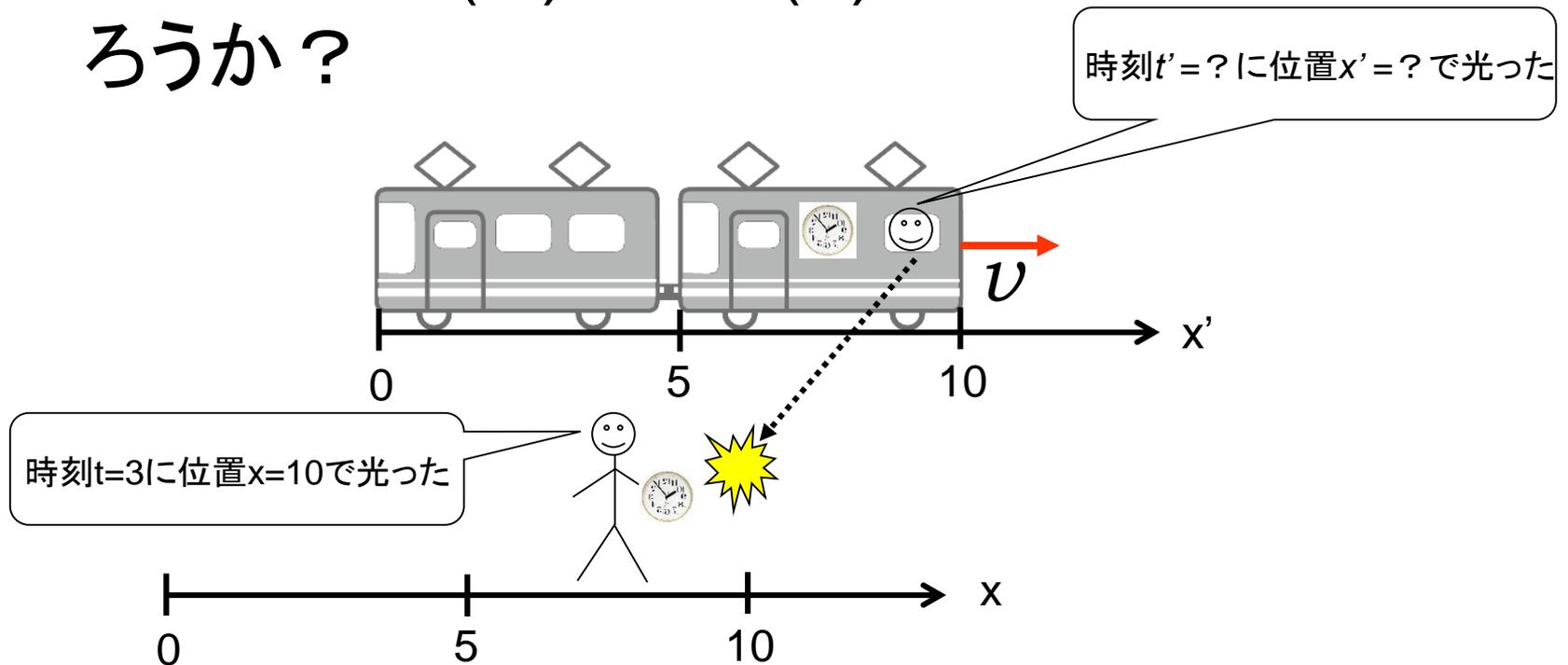
- S系において時刻 t 、位置 x で起きた事象は、S'系においていつ(t') どこで(x')観測されるのだろうか？

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

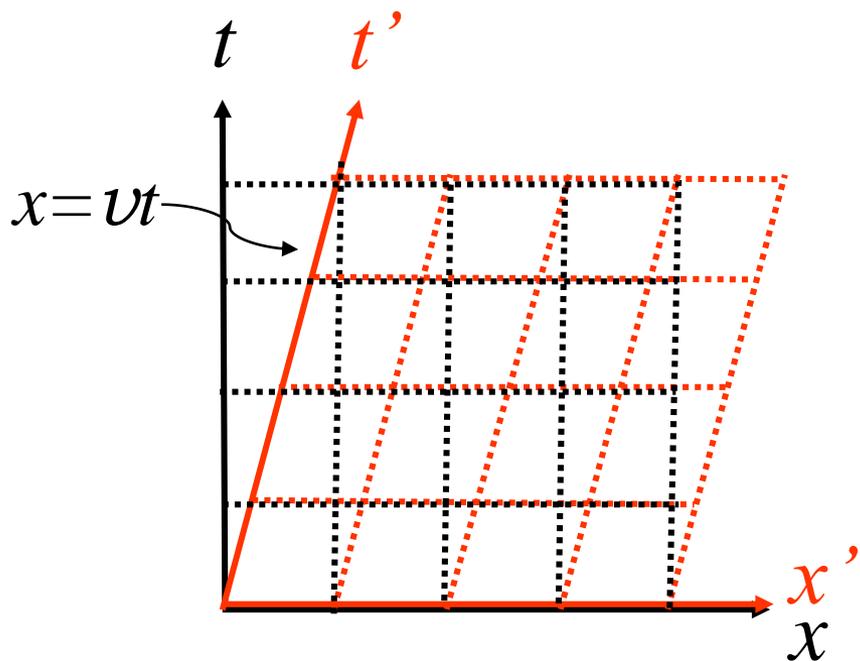
(x, t) から (x', t') への写像 (一次変換行列) の具体形が知りたい。

問題提起(イメージ重視)

- 駒場キャンパスにおいて時刻 t 、位置 x で起きた事象は、井の頭線に乗った人から見たらいつ(x')どこで(t')観測されるのだろうか？



我々の常識(ガリレイ変換)



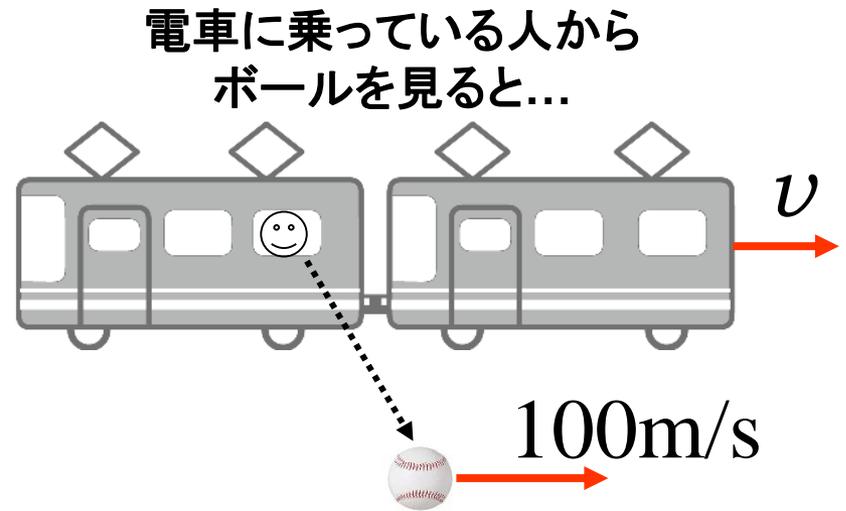
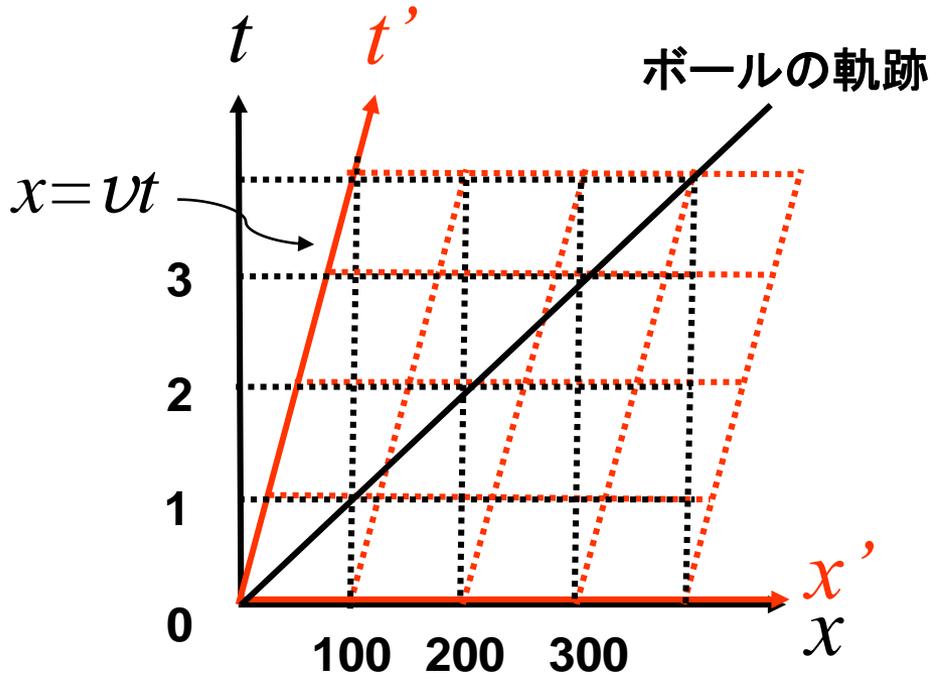
S系とS'系には同じ
時間が流れている $\Rightarrow t' = t$

S系における $x=vt$ の
線が、S'系における $\Rightarrow x' = x - vt$
 $x'=0$ の線

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

ガリレイ変換

速度のガリレイ変換



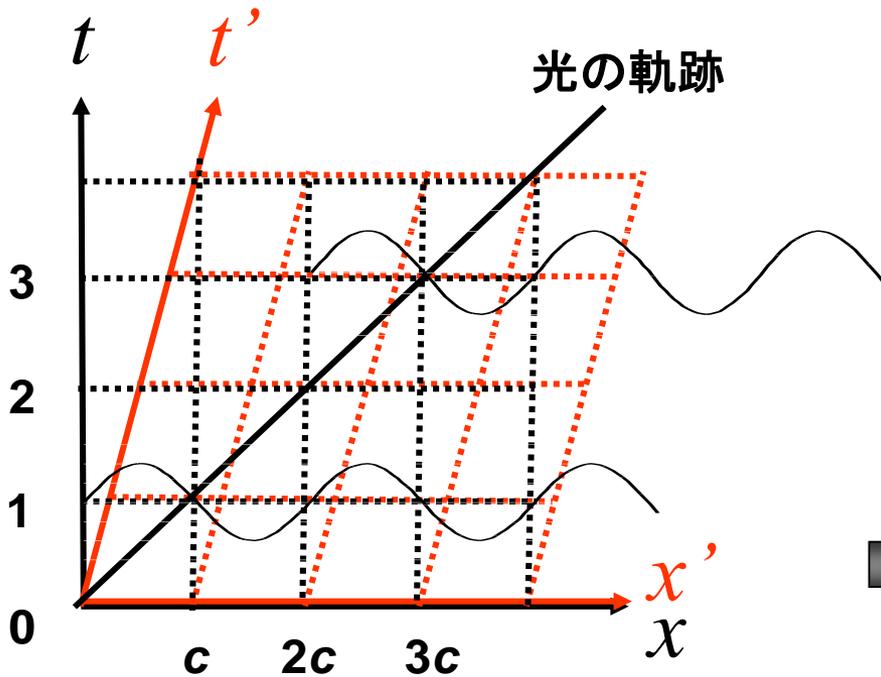
$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 - v \\ 1 \end{pmatrix}$$

ガリレイ変換

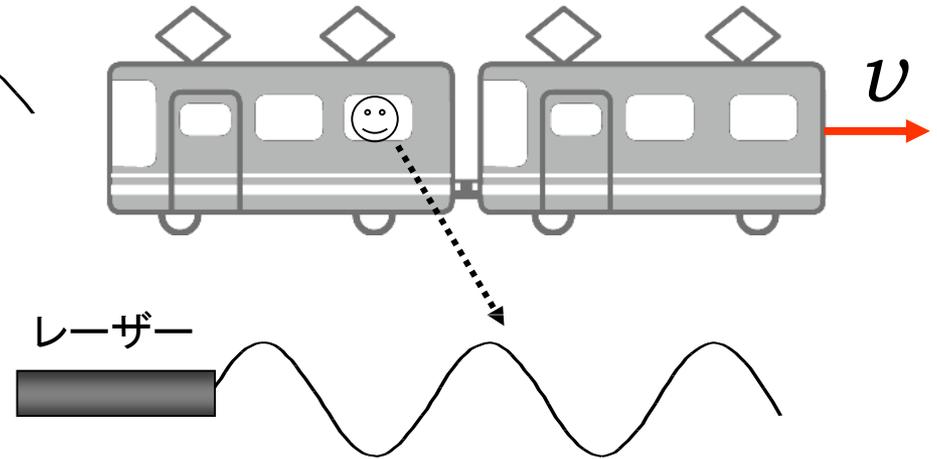
$$v' = \frac{x'}{t'} = \frac{100 - v}{1} = 100 - v$$

遅く見える！

電磁波のガリレイ変換



電車に乗っている人から
電磁波を見ると...



S系で見た電磁波

$$E(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

位相速度は

$$\frac{\omega}{k} = c \quad \left(c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \right)$$

ガリレイ変換
→

S'系で見た電磁波

$$E(x', t') = E_0 \cos(kx' - (\omega - kv)t')$$

位相速度は

$$\frac{\omega - kv}{k} = c - v$$

マクスウェル方程式と矛盾！

我々 (Einstein) の目標

相対性原理と光速不変の原理を同時に満たすような、S系とS'系間の時空座標の一次変換行列を新たに求める。

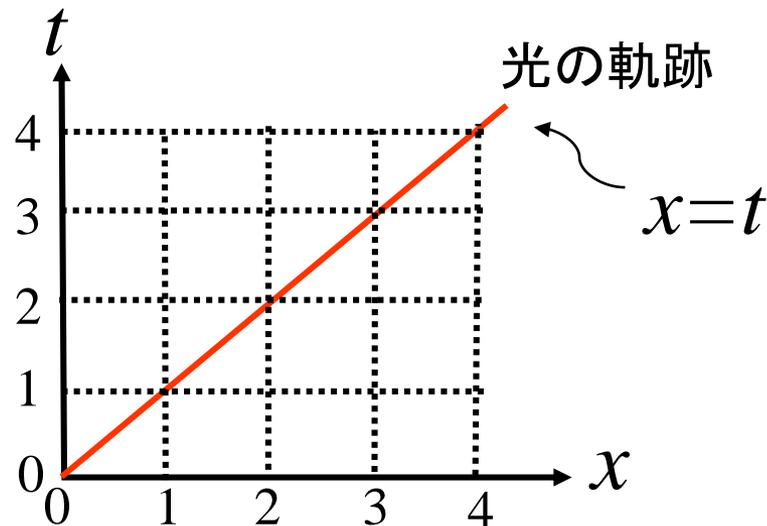
$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

~~$$\begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$~~

ガリレイ変換

準備：時間の単位の再定義

後の議論を簡単にするため、 $1/c$ 秒を、あらためて1秒と定義し、光は1秒間に1m進むものとする。
(光速 c を1m/秒とする)



注)元の単位に戻るには、 $t \rightarrow ct$, $v \rightarrow \frac{v}{c}$
と置き換えればよい

なぜ一次変換か？

1次変換で表わせないと仮定すると、

$$x' = Ax + Bt + \alpha x^2 + \beta xt + \gamma t^2 + \dots$$

$$t' = Cx + Dt + \chi x^2 + \delta xt + \varepsilon t^2 + \dots$$

S系での光の軌跡は

$$x = t$$

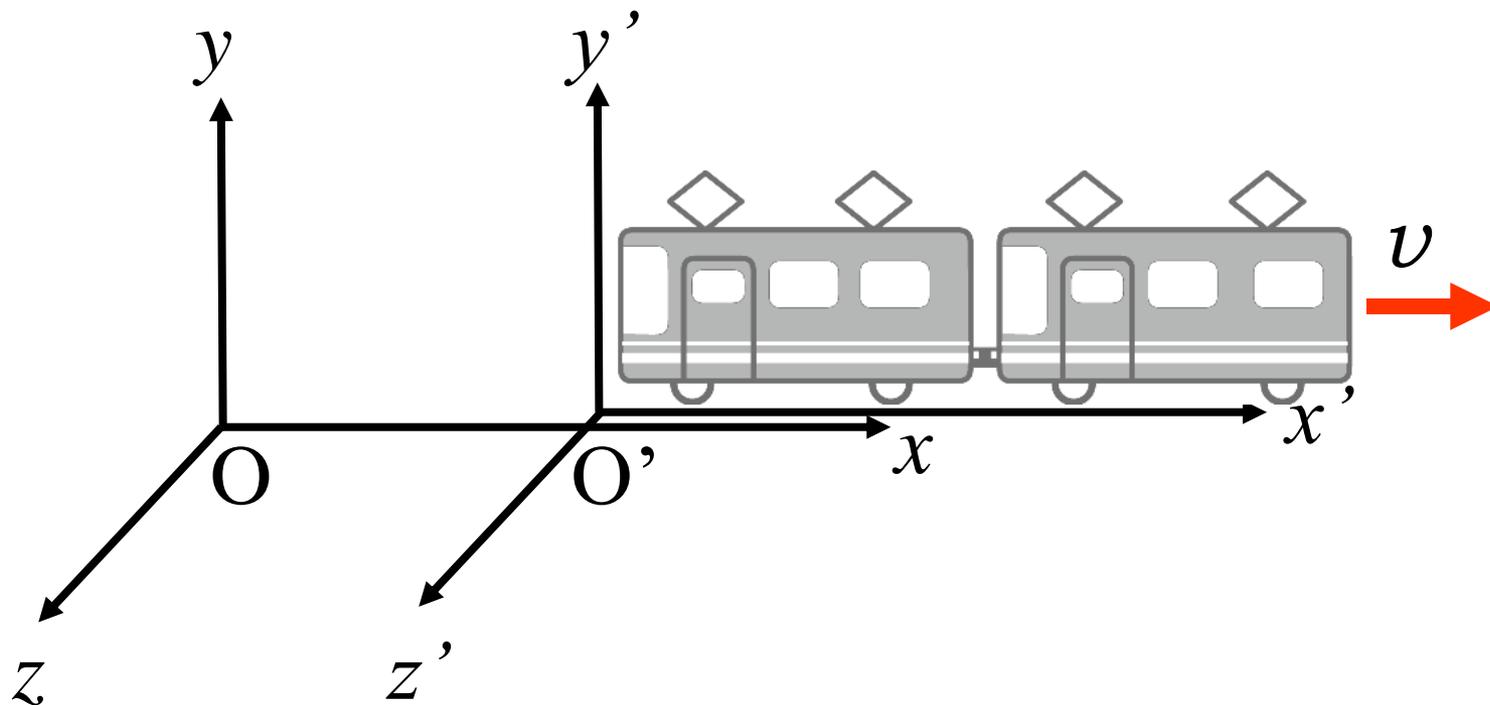
高次の項

S'系での光の速さは

$$\frac{x'}{t'} = \frac{At + Bt + \alpha x^2 + \beta xt + \gamma t^2 + \dots}{Ct + Dt + \chi x^2 + \delta xt + \varepsilon t^2 + \dots} = \frac{A + B + f(t, x)}{C + D + g(t, x)}$$

光速が位置と時刻に依存
→ 光速度不変の原理と矛盾

y軸、z軸を考慮しなくてもよいのか？
(なぜ $y' = y, z' = z$ としてよいのか？)



列車の高さ(y 座標)は、どちらの系でも時間や x 座標、 z 座標に依存しないだろう。しかし、速度 v には依存するかもしれないので $y' = f(v)y$ と仮定しよう。相対性原理より、 $y = f(v)y'$ も成り立つので、 $y' = (f(v))^2 y$ 。したがって $f(v) = 1$ より $y = y'$ 。

条件 その1 (光速不変の原理)

S系では時刻 $t = 0$ に位置 $x = 0$ より発せられた光は、1秒後 ($t = 1$) に位置 $x = 1$ に到達する。この現象をS'系で観測すると、

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B \\ C + D \end{pmatrix}$$

S'系での光速も1であるから

$$\frac{x'}{t'} = \frac{A + B}{C + D} = 1$$

$$\therefore A + B = C + D \dots \textcircled{1}$$

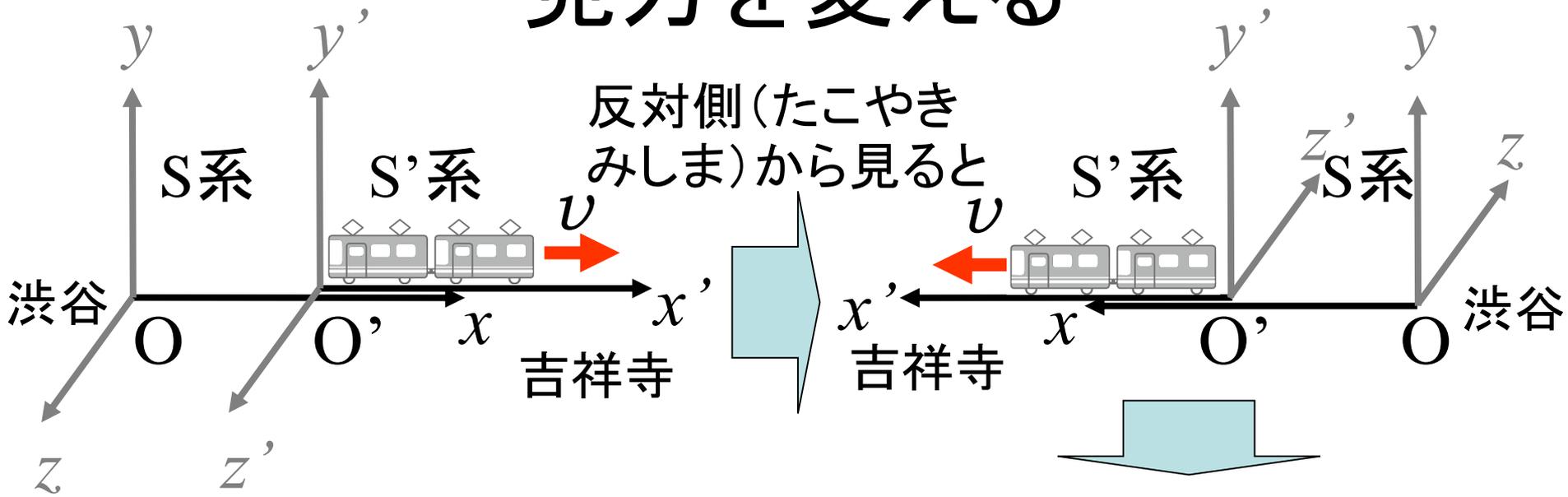
条件 その2 (相対速度)

S'系の原点 ($x'=0$) は、S系から見て速度 v で動いている。したがって、S系の時空座標 $(x, t) = (v, 1)$ のS'系における x' 座標は0である (t' 座標は不明)

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ? \end{pmatrix}$$

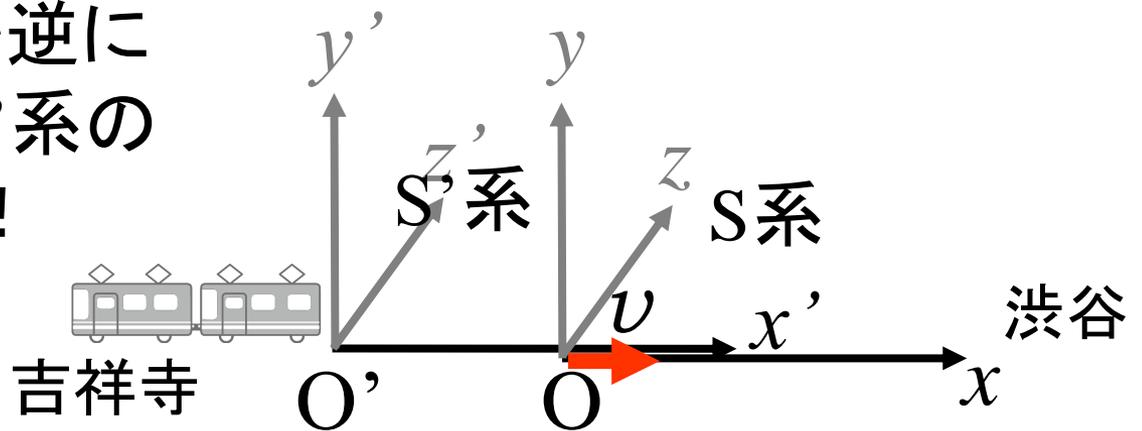
$$\therefore Av + B = 0 \dots \textcircled{2}$$

見方を変える



更に x, x' 軸の正の向きを逆に定義すると

x, x' 軸の正の向きを逆に定義すると、 S 系と S' 系の立場が入れ替わる！



条件 その3 (相対性原理)

S'系がS系に対してx軸正の方向に速度vで移動している状況は、x, x'軸の正の向きを逆に定義すれば、S系がS'系に対してx'軸正の方向に速度vで移動している状況とみなすこともできる。どちらの見方でも、相対性原理により、物理法則(つまり一次変換行列)は同じはずである。

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} x \rightarrow -x \\ x' \rightarrow -x' \end{matrix}]{\hspace{1cm}} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

← 同じ →

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{AD - BC} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

ここで x, x' 軸の正の向きを逆に定義すると

$$\begin{pmatrix} -x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{AD - BC} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x' \\ t' \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{AD - BC} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{AD - BC} \begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{③}$$

以上、まとめると、

$$A + B = C + D \dots \textcircled{1} \quad (\text{光速不変の原理})$$

$$Av + B = 0 \dots \textcircled{2} \quad (\text{相対速度で決まる条件})$$

$$\frac{1}{AD - BC} \begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \dots \textcircled{3} \quad (\text{相対性原理})$$

①、②、③より

$$A = D = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad B = C = -\frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}$$

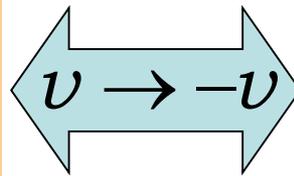
$$\therefore \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

現実(SI単位系)に戻ろう。

$t \rightarrow ct, \quad v \rightarrow \frac{v}{c}, \quad t' \rightarrow ct', \quad v' \rightarrow \frac{v'}{c}$ の置き換えをすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

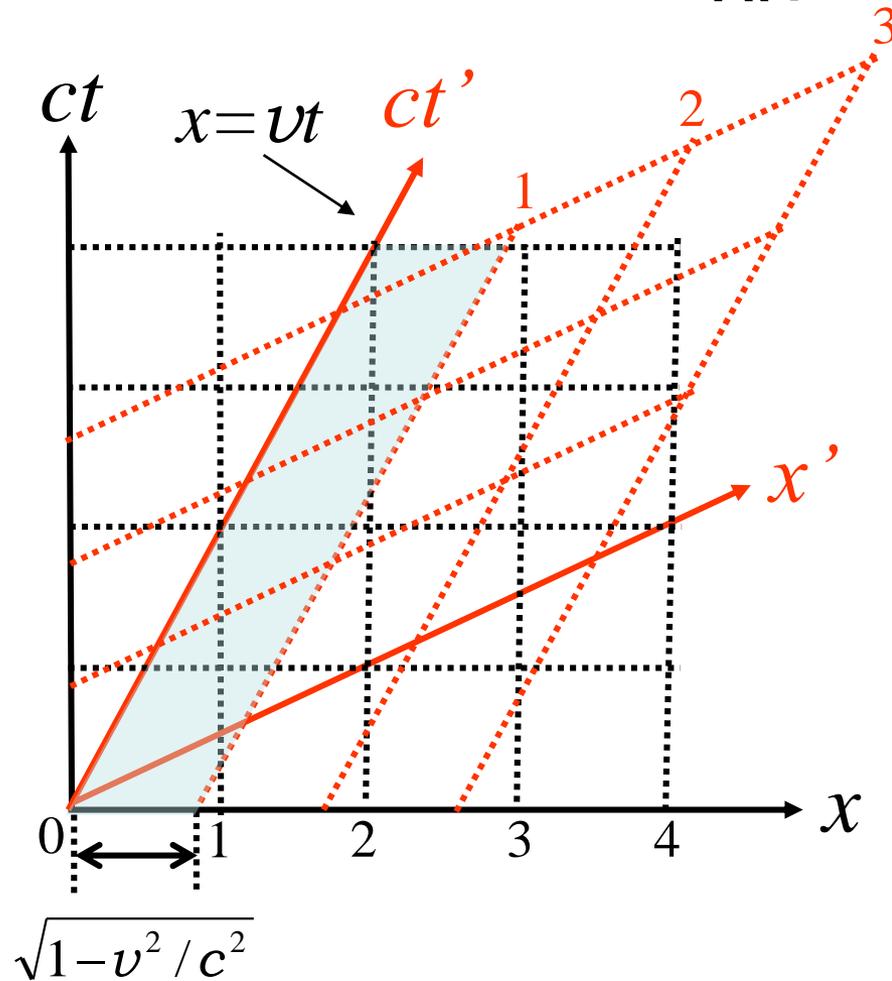


$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

ローレンツ変換

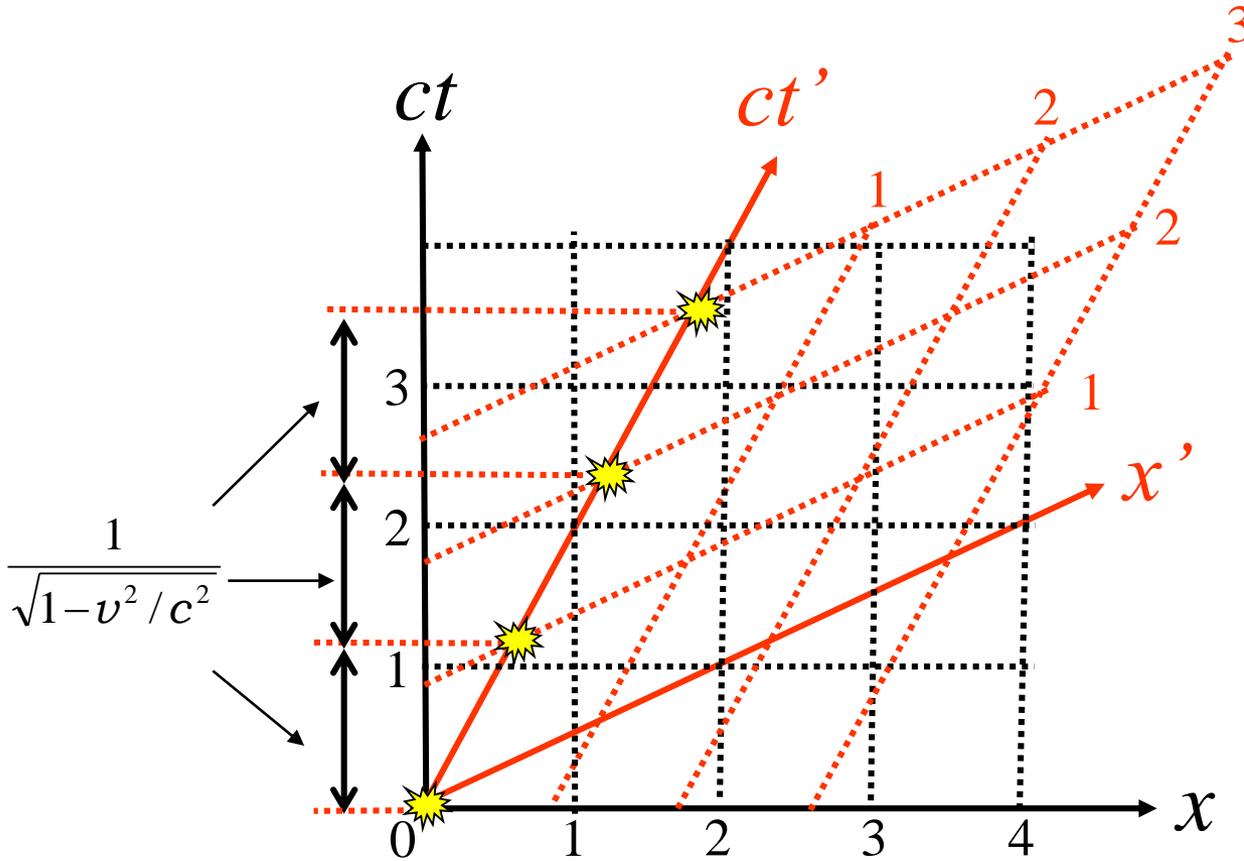
ローレンツ逆変換

ローレンツ収縮



S' 系で長さ L の物体は、 S 系では長さが $L\sqrt{1-v^2/c^2} (< L)$ に見える

時間の遅れ



S'系で $x'=0$ にあるフラッシュランプは、S'系の時計では1秒おきに点灯。

S系の時計では

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (> 1)$$

秒おきに点灯。

S'系の時間は、S系からみると $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (> 1)$ 倍遅く流れているように見える

15-1 相対性原理

200年以上もの間、ニュートンの運動方程式は、自然を正しく記述するものであると信じられてきた。これらの法則にあやまりがあるということがはじめて発見されたとき、同時に、それを修正する方法も発見されたのである。このあやまりを発見したのも、修正を加えたのも、アインシュタインであって、1905年のことである。

ニュートンの第2法則は、

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

という方程式によってあらわされるが、それは m が一つの定数であるという暗黙の仮定の上になっていた。しかし現在ではこの仮定は正しくはなく、一つの物体の質量は速度が大きいほど大きくなることがわかっている。アインシュタインの修正式では、 m は

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (15.1)$$

である。ここに“静止質量” m_0 は、物体が運動していないときの質量、 c は光の速さ、およそ 3×10^8 km/秒すなわちおよそ 186,000 マイル/秒である。

このことを覚え、問題がとけさえすればもうそれでいいという人達にとっては、相対性理論とはこれだけのものである——質量に補正を入れて、ニュートンの力学に変更を加えるだけのものである。上の式

質量とエネルギーの等価性

速度 v で運動する粒子の運動量を次のように定義し、これがニュートンの運動方程式

$F = \frac{dp}{dt}$ に従うとする。

$$p \equiv mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

この粒子のエネルギーの変化 dE は、力 F がこの粒子にした仕事 Fdx に等しいから

$$dE = Fdx = \frac{dp}{dt} dx = vdp$$

したがって、この粒子のエネルギーは、両辺を積分して、次のように表せる。

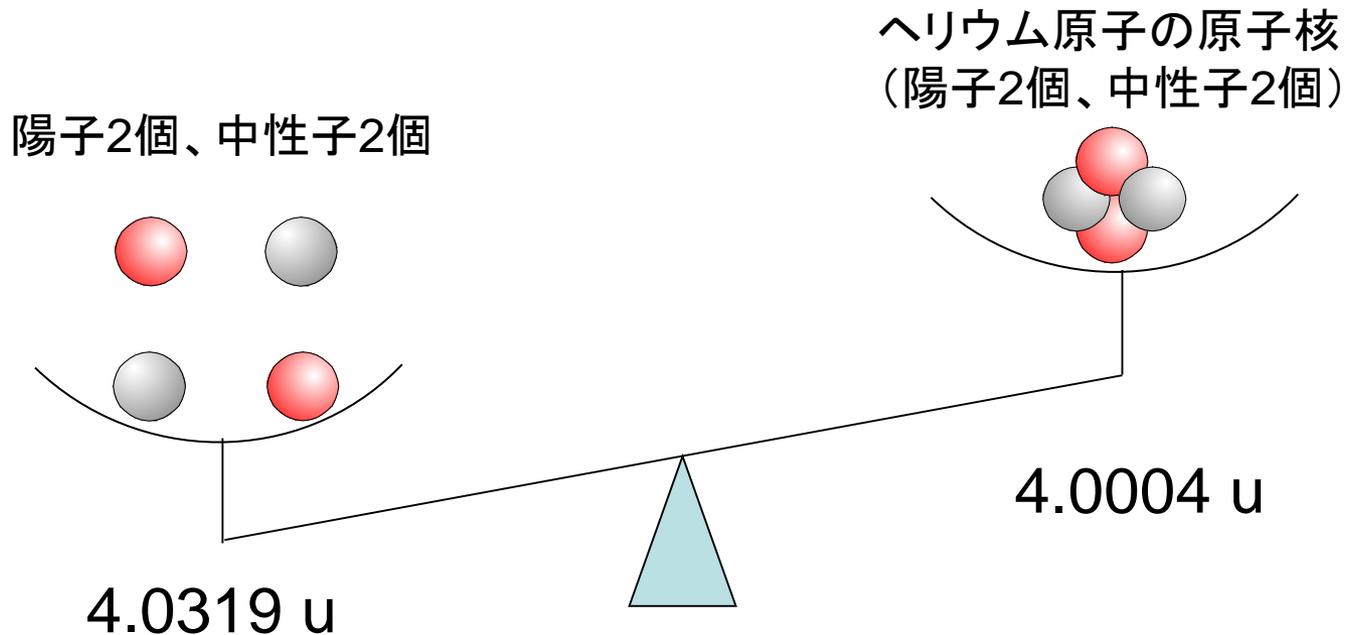
$$E = \int_0^p vdp = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2$$

この粒子が元からエネルギー $m_0 c^2$ (静止エネルギー) を持っていたと考えると、

$$E = mc^2$$

電荷と質量の大きな違い

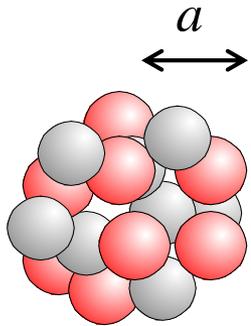
質量は保存しない！（質量素量などない）



($u = {}^{12}\text{C}/12 = 1.66 \times 10^{-27} \text{kg}$) 原子質量単位

$$E = mc^2 \quad (\text{質量はエネルギーの一形態})$$

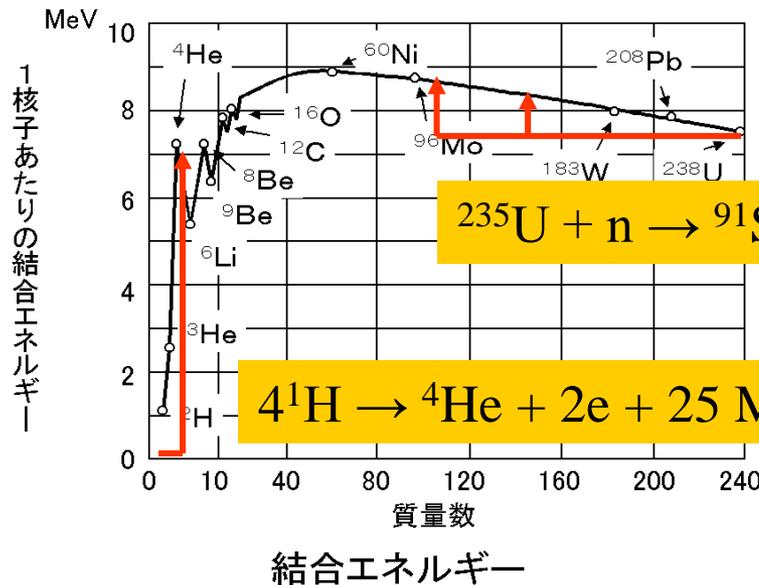
原子核の静電エネルギー



$$U = \frac{(eZ)^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5a} \quad a = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1.2 \times 10^{-15} \text{ m}$$

Z:原子番号
A:質量数

$$U = 1.15 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \times 10^{-13} \text{ J} = 0.72 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \text{ MeV}$$



ニュートン力学との関係

相対論的運動方程式

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \right)$$

$$\cong m_0 \frac{dv}{dt}$$

$v \ll c$

ニュートン力学における運動方程式

相対論的エネルギー

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} c^2 = m_0 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cong m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

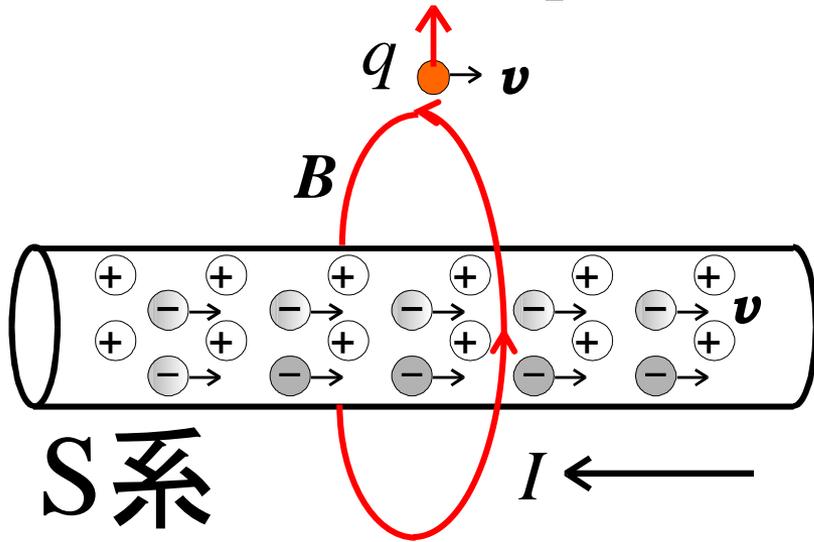
$v \ll c$

ニュートン力学における運動エネルギー

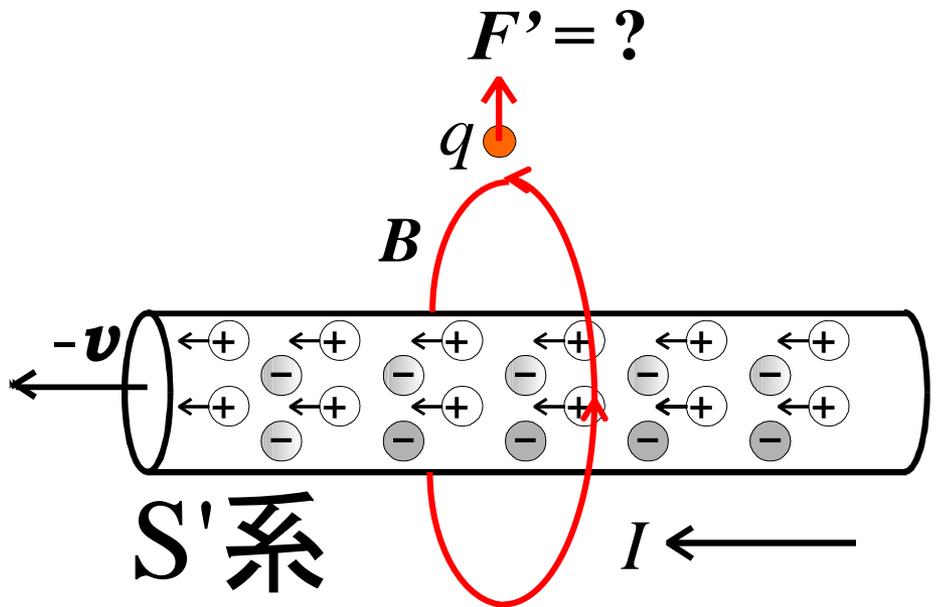
力の起源：電場or磁場？

狭義のローレンツ力

$$F = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$



$$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$$



$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = ?$$

ローレンツ収縮による導線の帯電

S系では、自由電子は速度 v で動いているので、自由電子の平均的間隔は止まっている場合(S'系)の間隔の $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 倍にローレンツ収縮している

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Leftrightarrow \rho'_- = \rho_- \sqrt{1-v^2/c^2}$$

S'系では、原子核は速度 v で動いているので、原子核の平均的間隔は止まっている場合(S系)の間隔の $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 倍にローレンツ収縮している

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

従って、

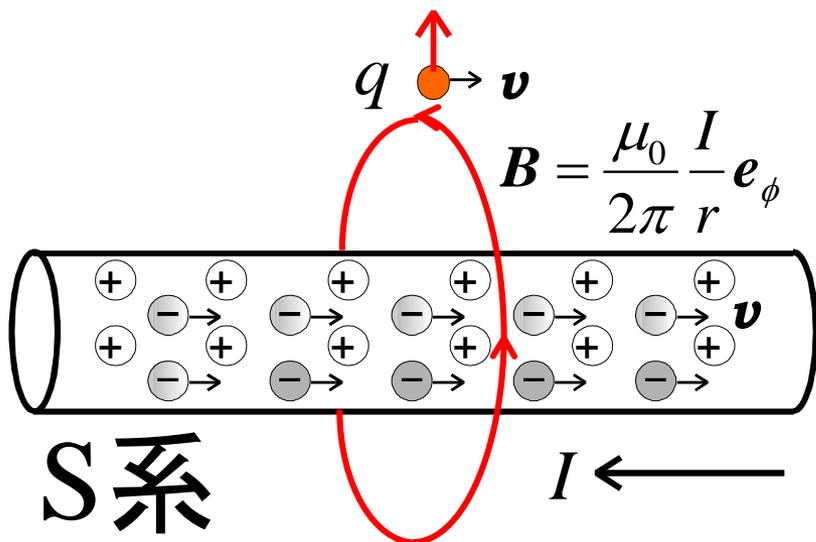
$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \frac{\rho_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \rho_- \sqrt{1-v^2/c^2} = \rho_+ \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

S'系では、導線は正に帯電！

力の起源：電場or磁場？

起源は磁場

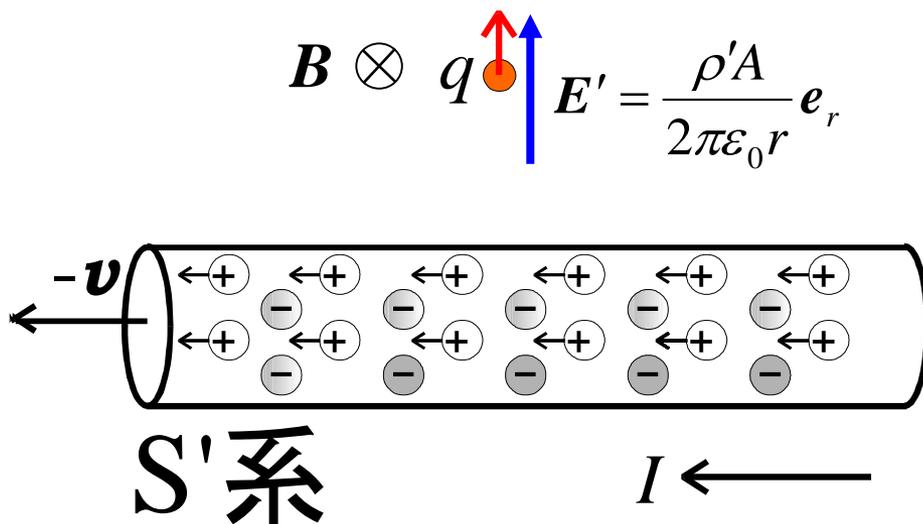
$$F = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = qv \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_r$$



$$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$$

起源は電場

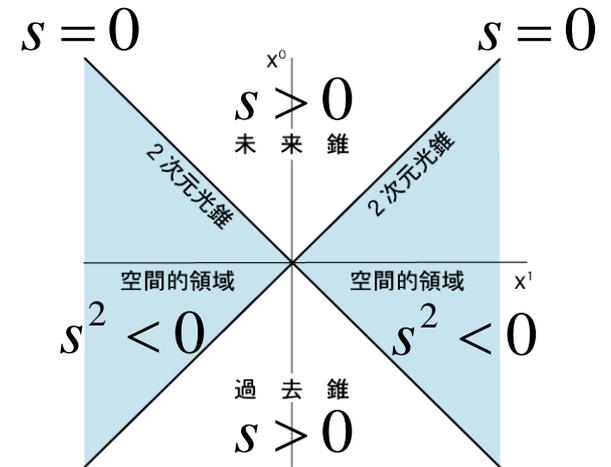
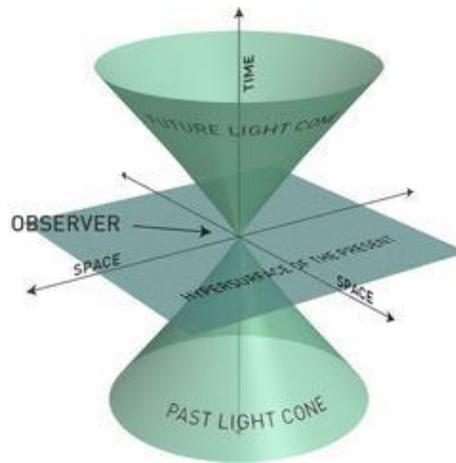
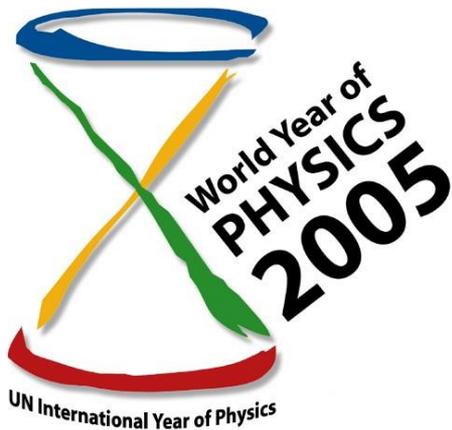
$$F' = qE' = \frac{q\rho'A}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r \cong qv \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_r$$



$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- \cong \rho_+ \frac{v^2}{c^2}$$

時空距離 (インタバル)

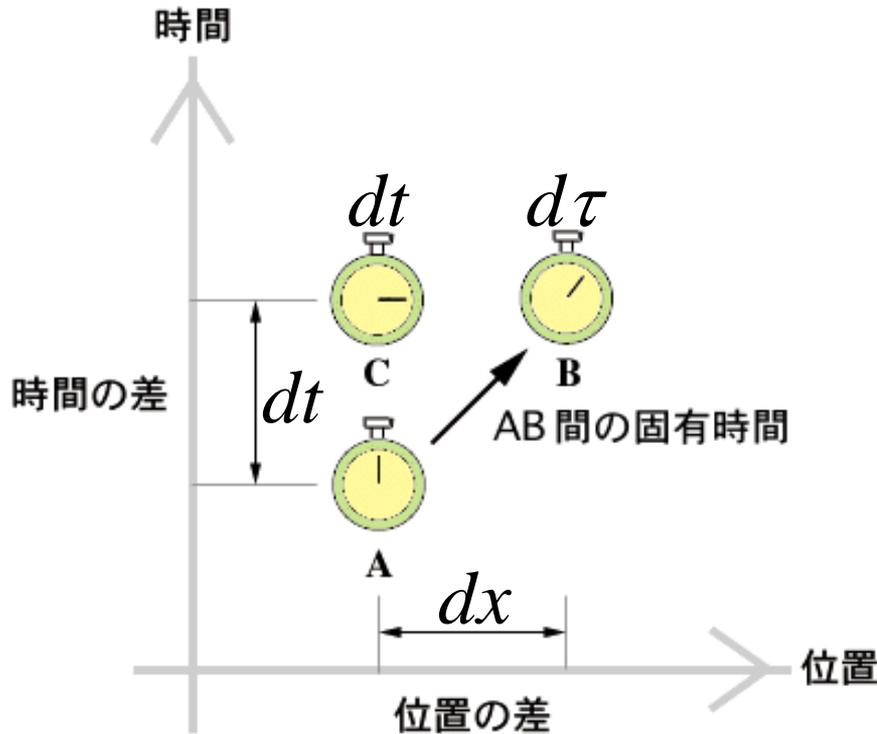
$$s^2 \equiv (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$



http://en.wikipedia.org/wiki/File:World_line.png

時空距離はローレンツ不変量 (どの慣性系から見ても同じ値を持つ)

固有時 (ローレンツ不変量)



動いている時計のインターバル

$$s^2 \equiv (cdt)^2 - (dx)^2 = (cdt)^2 - (vdt)^2$$

時計と共に動いている系からみたインターバル

$$s'^2 \equiv (cd\tau)^2 - (dx')^2 = (cd\tau)^2$$

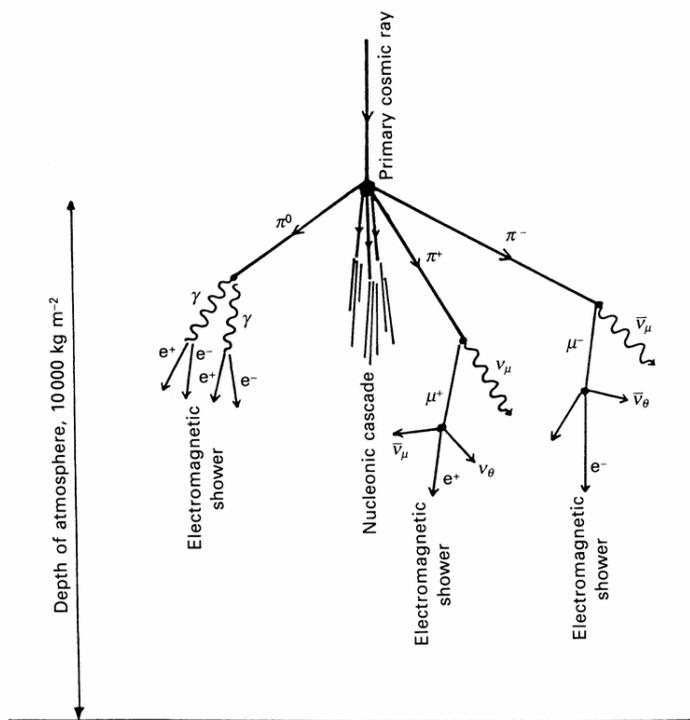
インターバルはローレンツ不変量なので

$$(cd\tau)^2 = (cdt)^2 - (vdt)^2$$

$$\rightarrow d\tau = dt \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

固有時 (ローレンツ不変量)

のびるミューオンの寿命



地上で観測される寿命

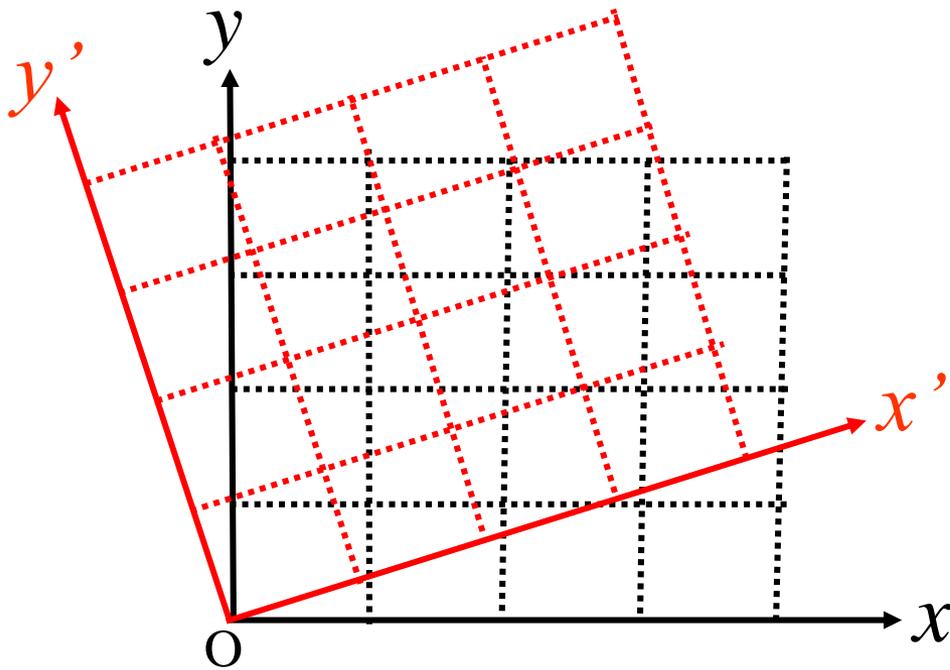
$$d\tau = dt \sqrt{1 - v^2 / c^2} \rightarrow dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \approx 200d\tau$$

静止したミューオンの寿命 (2.2 μ s)



ユークリッド空間とミンコフスキー空間

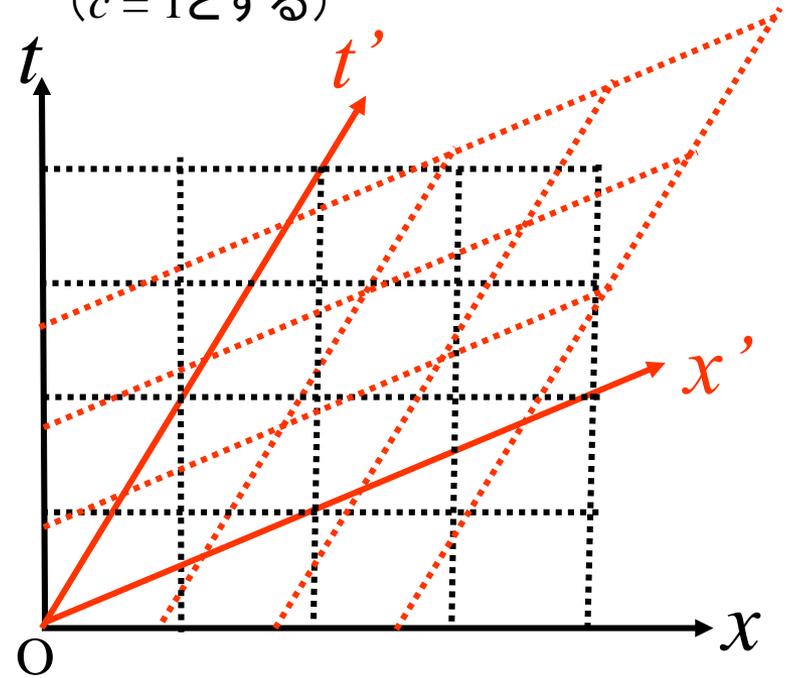
ユークリッド空間における座標変換



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \quad \text{空間距離不変}$$

ミンコフスキー空間における座標変換
($c=1$ とする)

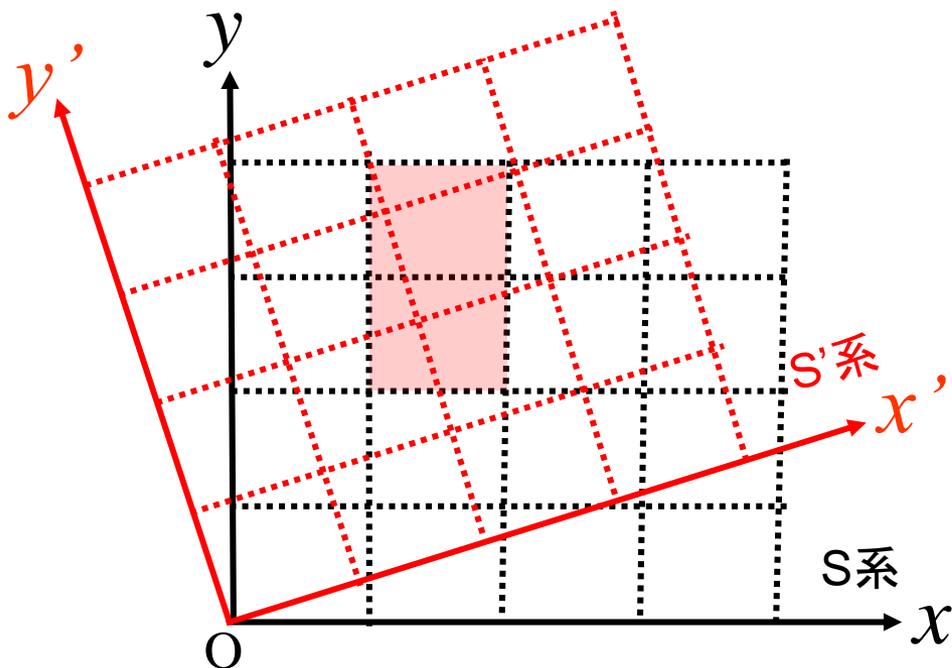


$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

$$t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2 \quad \text{時空距離不変}$$

幅 (width) と奥行き (depth)

ユークリッド空間

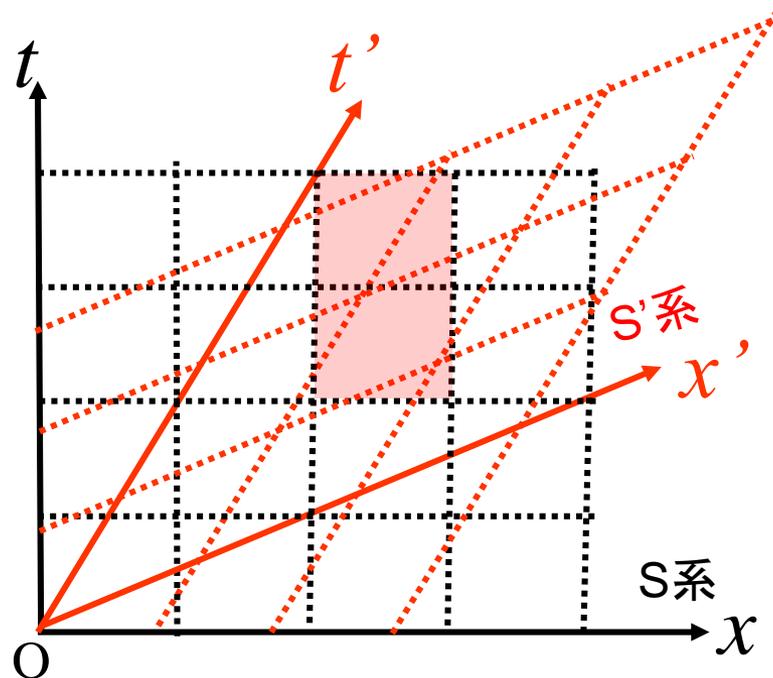


S系: 幅1、奥行き2

S'系: 幅1.5、奥行き2.3

幅や奥行きは基本的な量ではない
(見ている**角度**に依存する)

ミンコフスキー空間 ($c = 1$ とする)



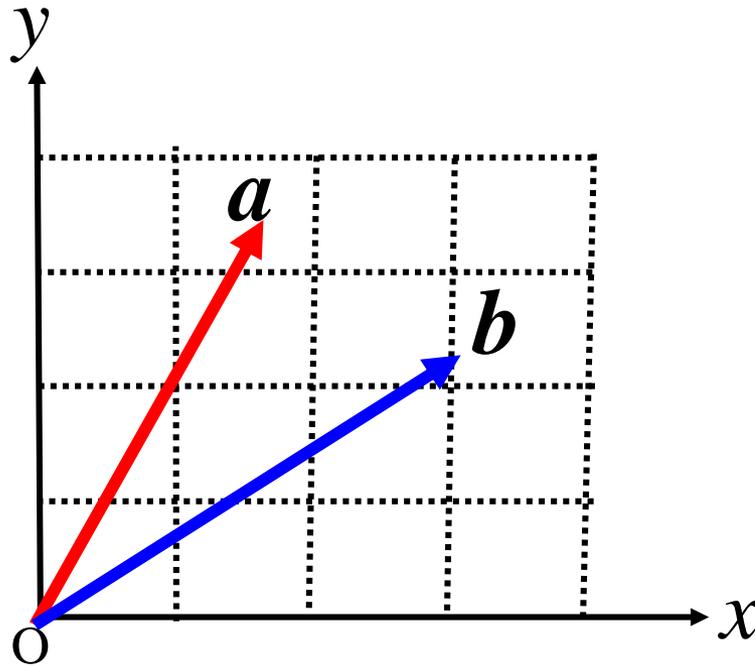
S系: 存在した空間の幅1、持続時間2

S'系: 存在した空間の幅2.3、持続時間3

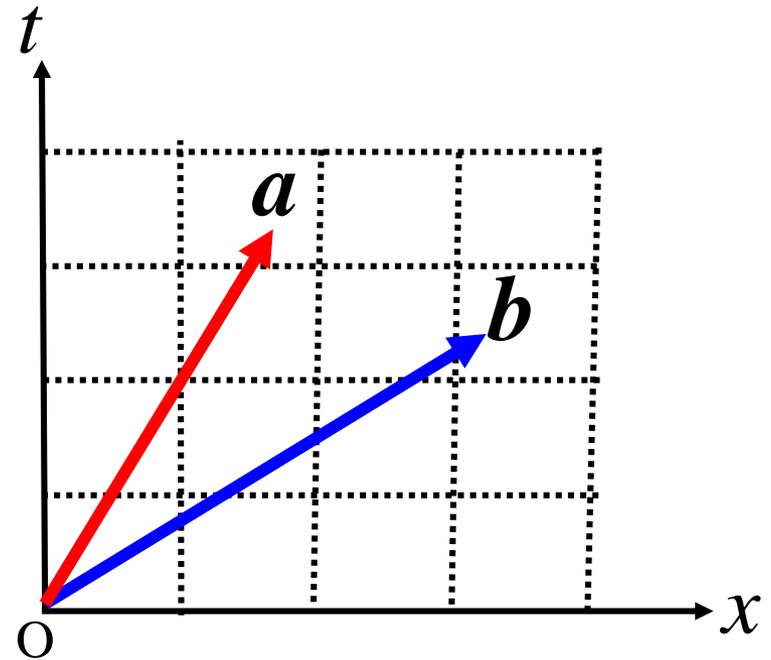
空間や時間は基本的な量ではない
(見ている**速度**に依存する)

スカラープロダクト(座標に依存しない量)

ユークリッド空間



ミンコフスキー空間 ($c = 1$ とする)



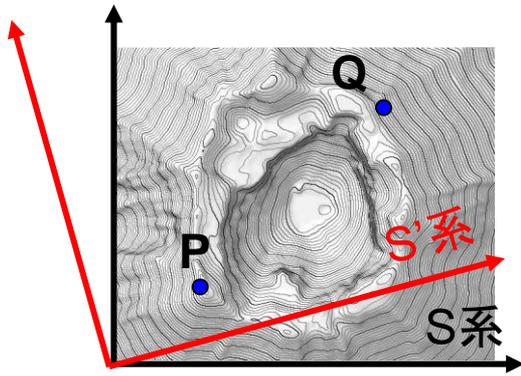
$$a_\mu b_\mu \equiv \sum a_\mu b_\mu \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$a_\mu b_\mu \equiv \sum' a_\mu b_\mu \equiv a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$

↑
アインシュタインの縮約(同じ添え字が現れたら、すべての成分について和を取る)

2次元ユークリッド空間における スカラーとベクトル

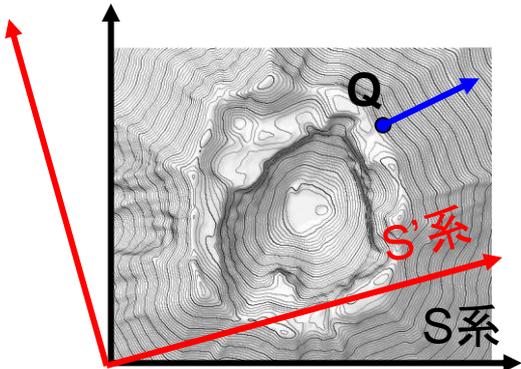
スカラー: 座標系に依存しない(1成分)量



スカラー(場)の例:

- 標高(山頂Pの標高は、S系でみてもS'系でみても同じ)
- 距離(PQ間の距離は、S系でみてもS'系でみても同じ)
- 質量(山頂Pにいる人の質量は、S系でみてもS'系でみても同じ)

ベクトル: 座標変換と同じ変換規則に従う多成分量

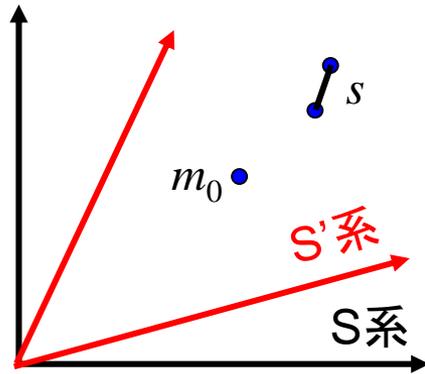


ベクトル(場)の例:

- 勾配(点Qにおける重力ポテンシャルの勾配のx成分、y成分は、座標と同じ変換規則に従う)
- 速度ベクトル(点Qにあるボールの速度ベクトルのx成分、y成分は、座標と同じ変換規則に従う)

ミンコフスキー空間における スカラーと4元ベクトル

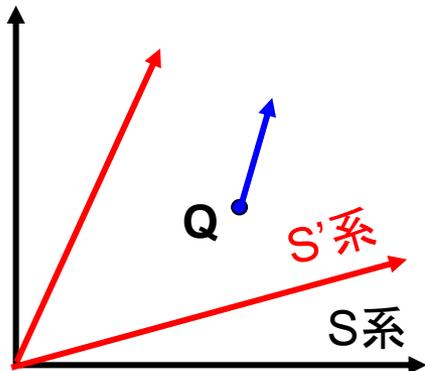
スカラー: 座標系に依存しない(1成分)量



スカラーの例:

- ・時空距離(インタバル)
- ・固有時
- ・静止質量(4元運動量の絶対値)
- ・波の位相(4元位置ベクトルと4元波数ベクトルのスカラープロダクト)

4元ベクトル: 座標変換と同じ変換規則に従う4成分量



ベクトルの例:

- ・4元位置ベクトル
- ・4元速度ベクトル
- ・4元運動量(4元波数ベクトル)
- ・4元電流密度
- ・4元ポテンシャル(電磁ポテンシャル)

4元速度と4元運動量

物体の時空座標(4元ベクトル)

$$(ct, \mathbf{r}) = (ct, x, y, z)$$

物体の時空座標の変化(4元ベクトル)

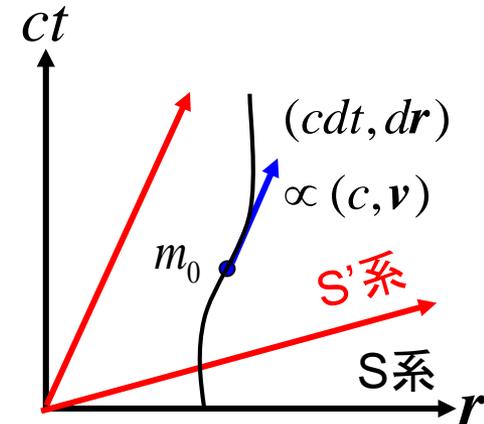
$$(cdt, d\mathbf{r}) = (cdt, dx, dy, dz)$$

物体の4元速度ベクトル

$$\left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (c, v_x, v_y, v_z)$$

物体の4元運動量ベクトル

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (c, v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right)$$



固有時(スカラー)で割る

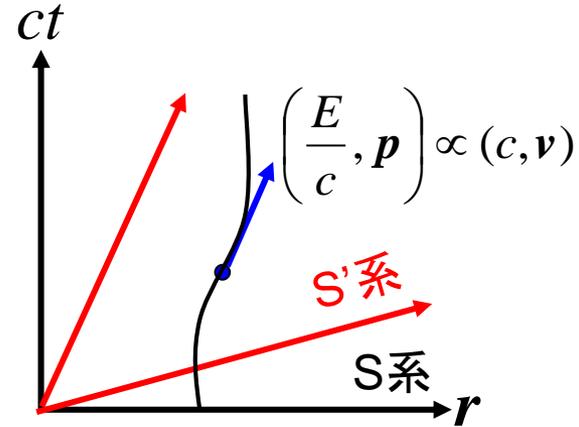
$$d\tau = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

静止質量 m_0 (スカラー) をかける

運動量とエネルギー (同じ実在の2つの側面)

4元運動量ベクトル

$$\left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = (mc, m\mathbf{v}) \left(m \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$



4元運動量ベクトルの大きさの自乗(スカラー)

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 \Leftrightarrow E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}$$

運動量とエネルギーの比例関係

$$\left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \propto (c, \mathbf{v}) \rightarrow \mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v}$$

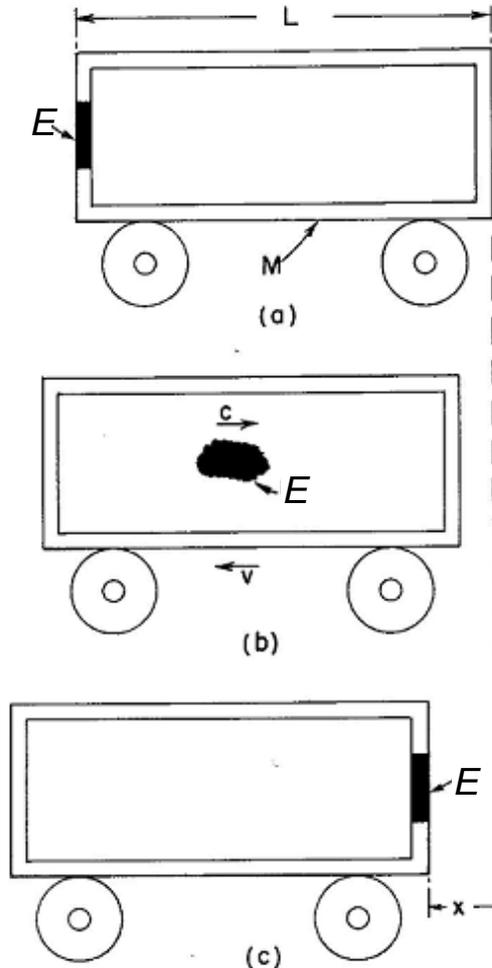
$m_0 = 0$

$$E = cp$$

光子の場合

$v = c$

光子(電磁場)のエネルギーと運動量



光子放出後の箱の質量変化 $= E/c^2$

光子放出後の箱の速度 $= p/M$

光子の飛行時間 $= L/c$

箱の移動距離 $= x = L/c \times p/M = Lp/cM$

箱の重心変化がないとすると、 $Mx = EL/c^2$

したがって、

$$p = \frac{E}{c} \rightarrow g = \frac{S}{c^2}$$

S : エネルギー流
(Poyntingベクトル)

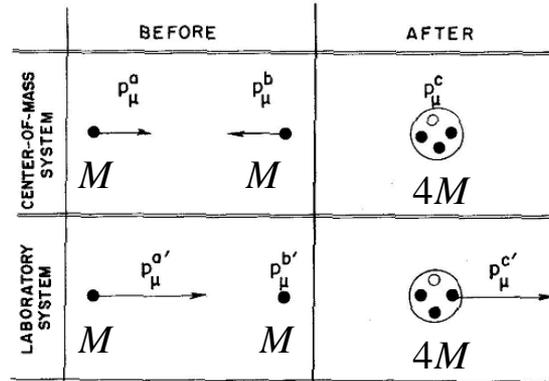
g : 運動量密度

Fig. 27-7. The energy E in motion at the speed c carries the momentum E/c .

反陽子生成エネルギーの計算

The Feynman lectures on Physics, volume II, 25-2

Fig. 25-1. The reaction $P + \bar{P} \rightarrow 3P + \bar{P}$ viewed in the laboratory and CM systems. The incident proton is supposed to have just barely enough energy to make the reaction go. Protons are denoted by solid circles; antiprotons, by open circles.



$$p_\mu^a = (E^a, \mathbf{p}^a)$$

$$p_\mu^{a'} = (E^{a'}, \mathbf{p}^{a'})$$

$$p_\mu^b = (E^b, \mathbf{p}^b)$$

$$p_\mu^{b'} = (M, 0) \text{ given}$$

$$p_\mu^c = (4M, 0) \text{ given}$$

$$p_\mu^{c'} = (E^{c'}, \mathbf{p}^{c'})$$

4元運動量保存則(エネルギー保存則+運動量保存則)より

$$p_\mu^{a'} + p_\mu^{b'} = p_\mu^{c'} \rightarrow E^{a'} + M = E^{c'}, \mathbf{p}^{a'} = \mathbf{p}^{c'}$$

4元運動量の大きさは静止質量(スカラー)なので

$$p_\mu^c p_\mu^c = p_\mu^{c'} p_\mu^{c'} = 16M^2 \rightarrow (E^{c'})^2 - (\mathbf{p}^{c'})^2 = 16M^2$$

$$p_\mu^a p_\mu^a = p_\mu^{a'} p_\mu^{a'} = M^2 \rightarrow (E^{a'})^2 - (\mathbf{p}^{a'})^2 = M^2$$

$p^{a'}$ を消去すると、

$$(E^{a'} + M)^2 + M^2 - (E^{a'})^2 = 16M^2 \rightarrow E^{a'} = 7M$$

光の縦ドップラー効果

4元運動量ベクトルのローレンツ変換 ($c=1$)

$$p' = \frac{p - vE}{\sqrt{1 - v^2}}$$
$$E' = \frac{E - vp}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$E = p$$
$$E = \hbar\omega$$


$$\omega' = \frac{\omega - v\omega}{\sqrt{1 - v^2}} = \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}} \omega$$

SI単位系に戻ると

$$\omega' = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \omega \cong \left(1 - \frac{v}{c}\right) \omega$$

$$\Delta\omega \equiv \omega' - \omega \cong -kv \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right)$$

cf. 音のドップラー効果

$$\omega' = \frac{V - v_{\text{観測者}}}{V - v_{\text{音源}}} \omega$$

V : 音速

2005年東大2次試験物理

第3問 レーザー光が原子に与える作用を用いることにより、原子気体を冷却し、なおかつ空間のある領域に保つことができる。そのような冷却原子気体を用いて、原子の波動性を検証する次のような実験を行った。

図3-1のように、鉛直上向きを z 軸とする直角座標系を設定する。レーザー光によって冷却原子気体を点 $(x, y, z) = (0, 0, L + l)$ のまわりに保つ。この点から L だけ鉛直下方に、 y 軸に平行な間隔 d 、長さ a の二重スリットを水平に置く。さらに l だけ鉛直下方に、原子が当たると蛍光を発するスクリーンを水平(xy 面上)に置く。これらはすべて真空中にある。冷却原子気体の空間的広がり、二重スリットの間隔 d 、および長さ a は、 L, l に比べて十分小さいとする。スクリーン上の蛍光のようすは、ビデオカメラによって撮影する。

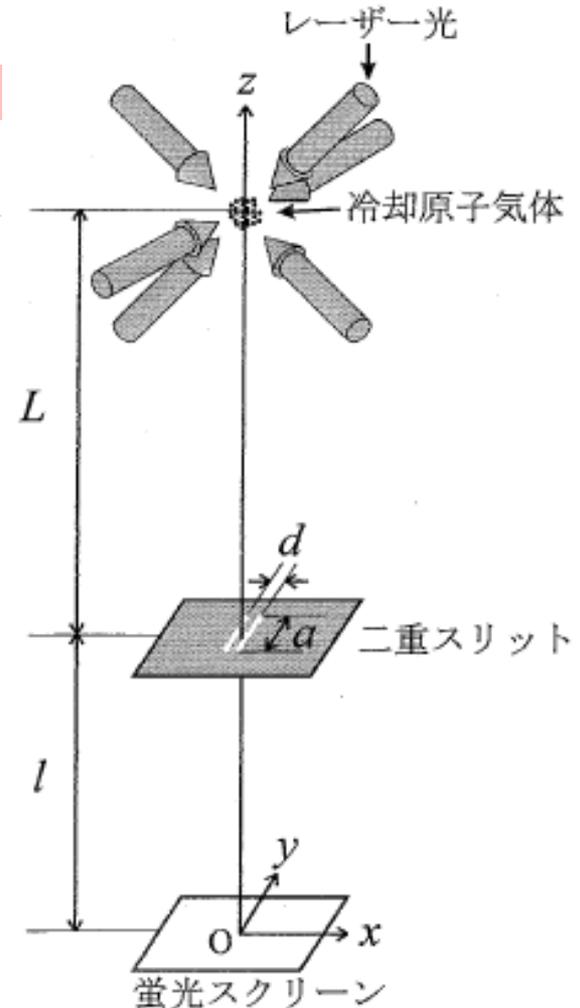
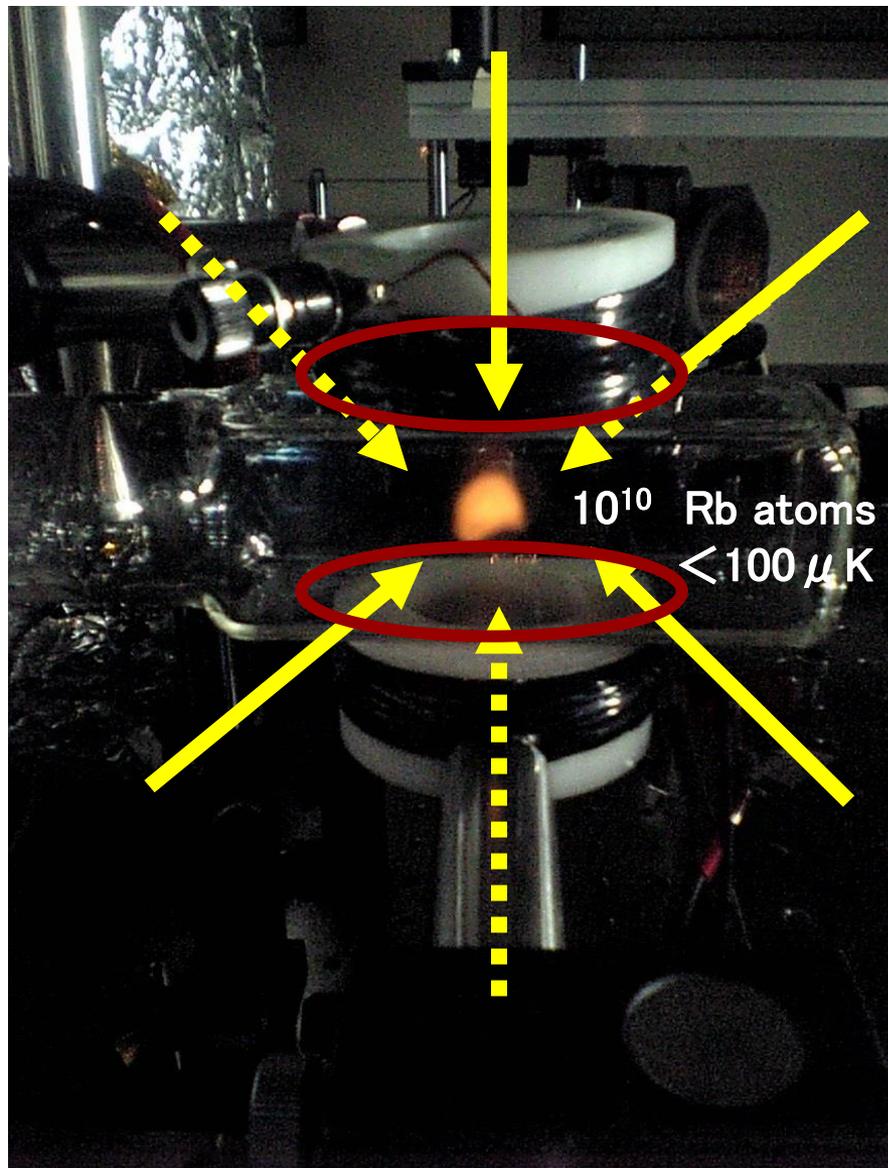
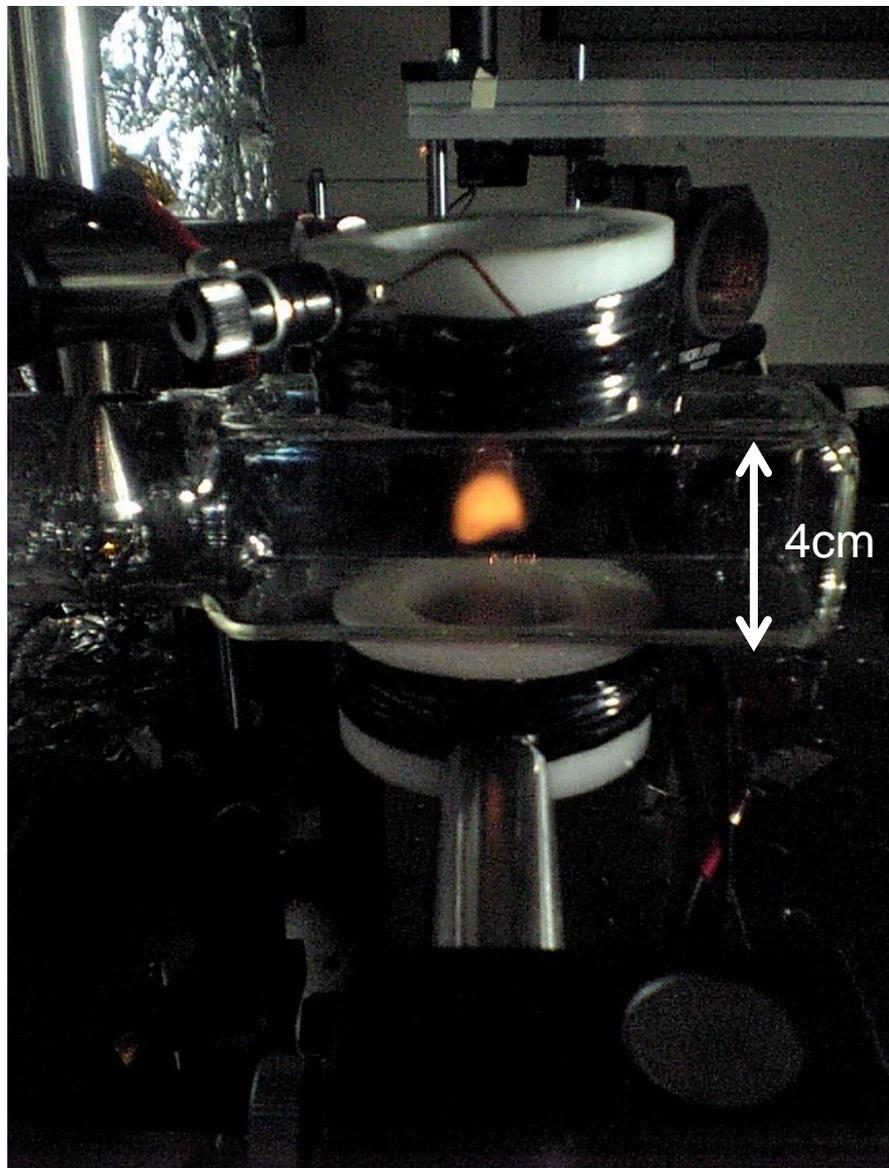
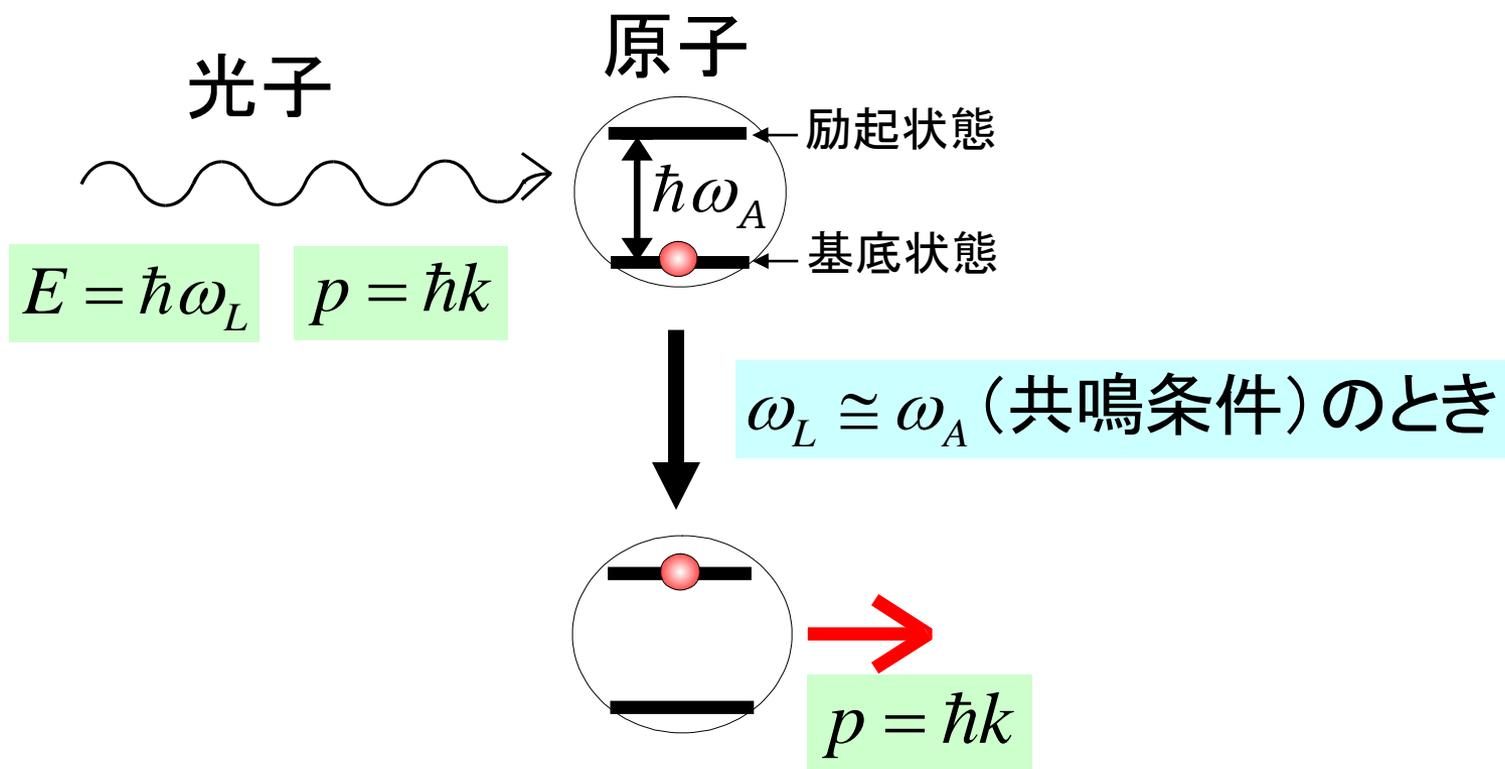


図3-1

Rb原子のレーザー冷却@鳥井研

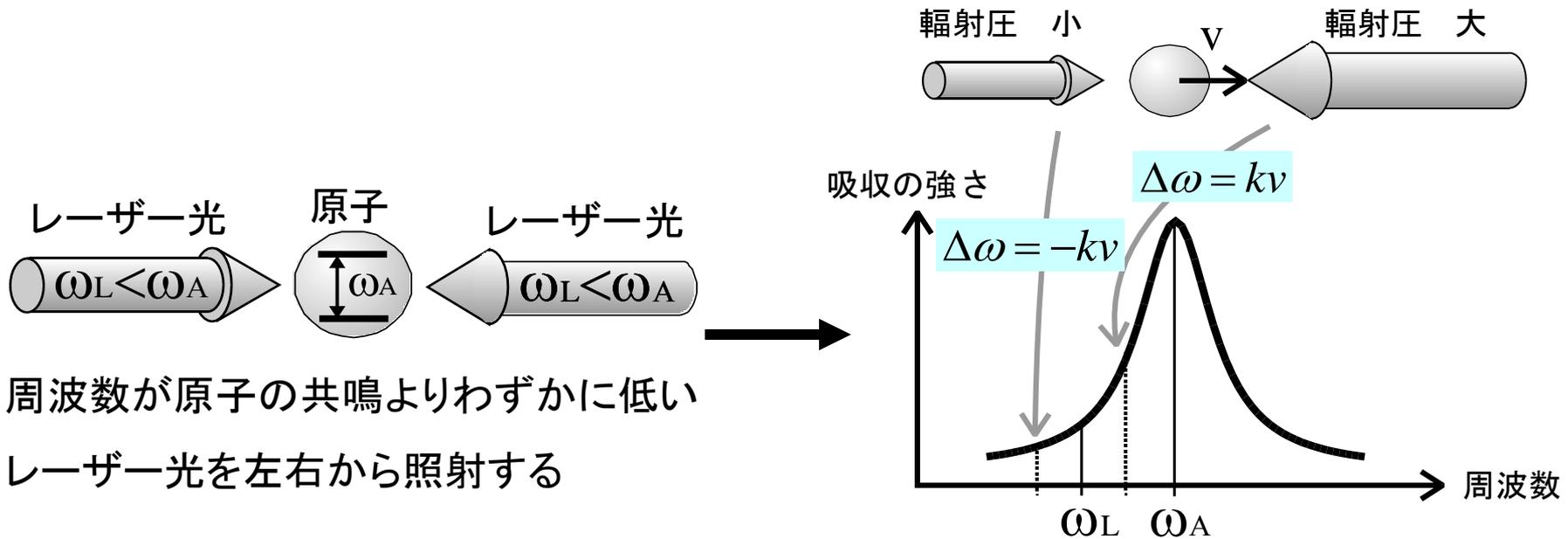


輻射圧：光子吸収による運動量変化



原子は励起状態になり、反跳運動量 $p = \hbar k$ を受ける

ドップラー冷却の原理



ドップラー効果によって、対向するレーザー光からの輻射圧をより強く受ける

原子は減速される(ドップラー冷却)

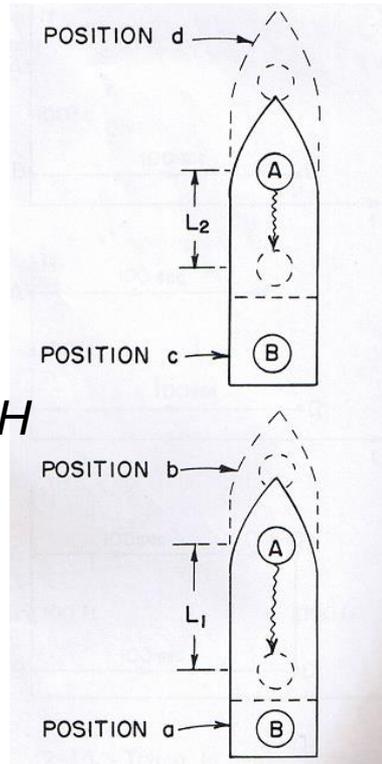
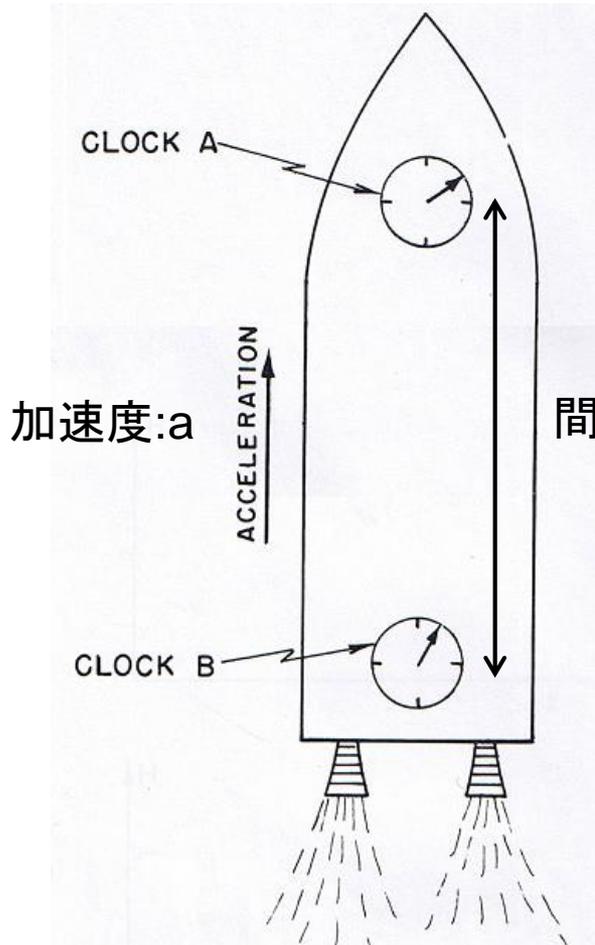
4次元(ミンコフスキー空間)における ベクトル演算

Table 25-2

The important quantities of vector analysis in three and four dimensions.

	Three dimensions	Four dimensions
Vector	$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$	$a_\mu = (a_t, a_x, a_y, a_z) = (a_t, \mathbf{a})$
Scalar product	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$	$a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z = a_t b_t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
Vector operator	$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$	$\nabla_\mu = (\partial/\partial t, -\partial/\partial x, -\partial/\partial y, -\partial/\partial z) = (\partial/\partial t, -\nabla)$
Gradient	$\nabla\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z} \right)$	$\nabla_\mu\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, -\nabla\varphi \right)$
Divergence	$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\nabla_\mu a_\mu = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{a}$
Laplacian and D'Alembertian	$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square^2$

加速度系(重力場中)における時間の遅れ(重力の赤方偏移)



ドップラー効果(特殊相対論)より

$$\omega = \omega_0 \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cong \omega_0 (1 + v/c)$$

等価原理
(一般相対論)より

$$a = g$$

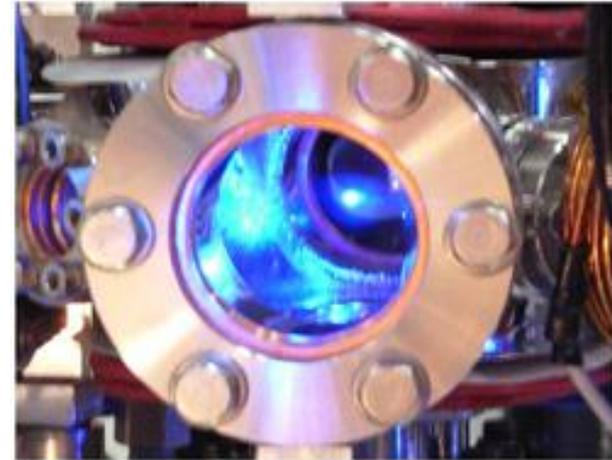
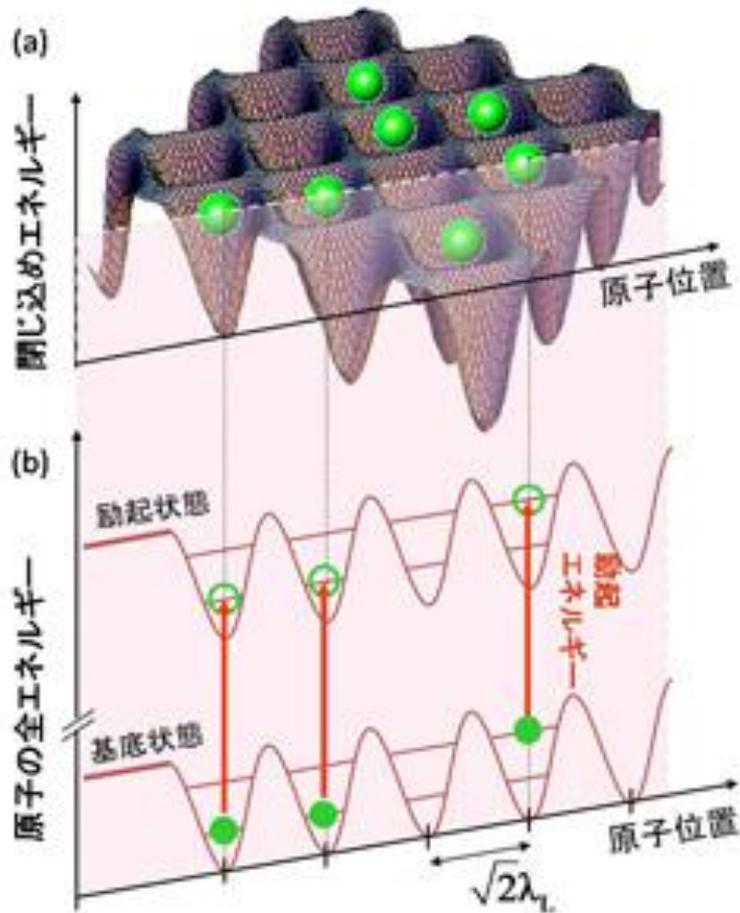
Bから見たAの相対速度

$$v = a\Delta t = \frac{aH}{c}$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{gH}{c^2} \right)$$

高い場所の時計は速く進む!

光格子時計(未来の1秒の定義?)



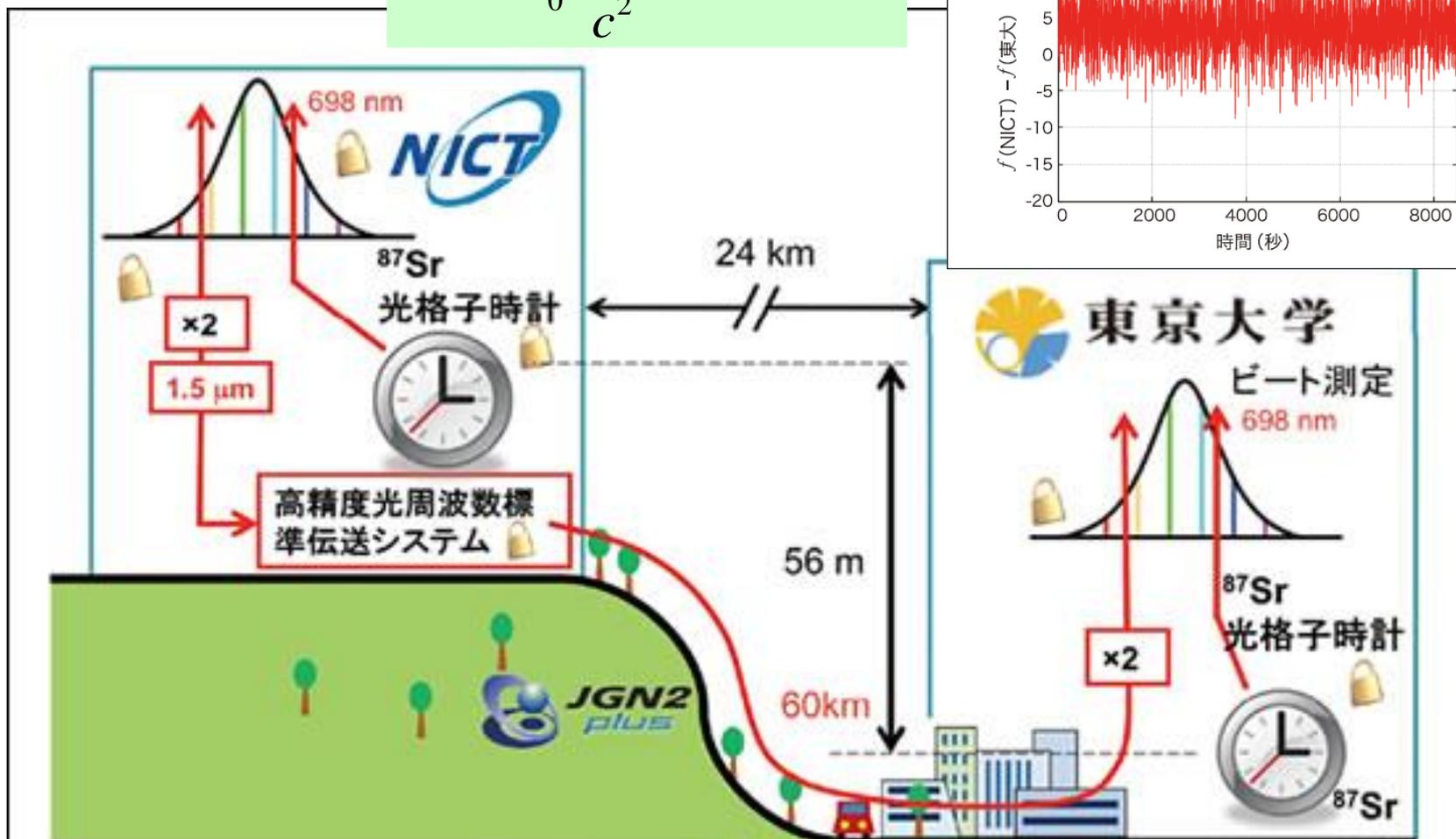
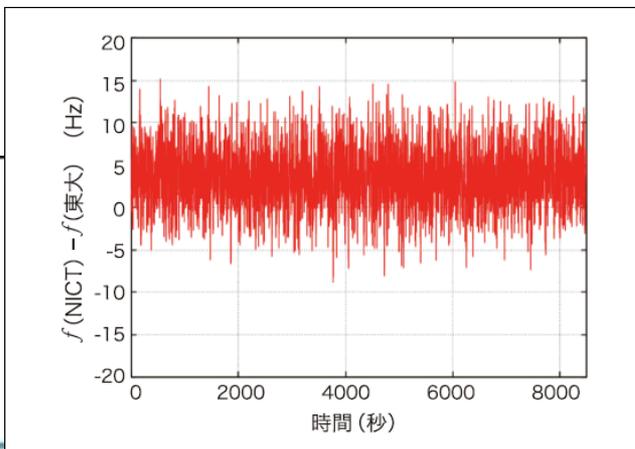
ストロンチウム原子の磁気光学トラップ



発明者の香取さん@東大物工

本郷と小金井の時間の進みの違い

$$\Delta\omega = \omega_0 \frac{gH}{c^2} \approx 2\pi \times 3 \text{ Hz}$$



100年で科学が理論に追いついてきた。

相対性理論の実証①—原子時計による比較実験

超高精度の原子時計が開発され、地上設置の時計と宇宙船や人工衛星搭載の時計との比較実験によって、速度や重力の影響で時間の進み方が速くなったり、遅くなったりすることが確認された。現在では、地上において高さが30cm違うだけで、両者に作用する重力の違いによって、上方の原子時計の進み方が若干速いことが確認されている。

応用例=GPS



GPSのしくみ

衛星から地球上の車に電波を発信、電波の速度と電波が車に届くまでの時間によって、衛星と車の距離を割り出す（距離=速度×時間）。よって、衛星搭載の時計と地上の時計の時間がずれてしまうと、正しい位置情報を得られない。

GPS衛星の時間

- 衛星は秒速4kmというスピードで地球を周回しているので、1日7.1マイクロ秒遅れる（動くものは時間が遅れる）
- 衛星の軌道は高度約2万km。重力が地上より弱いので、1日45.7マイクロ秒進む（重力の強いところは時間が遅れる）
- 両者を足すと、衛星の時計は1日あたり38.6マイクロ秒だけ進んでしまうことになるので、GPS衛星の原子時計は、この誤差を補正して運用されている

地上の時間

相対性理論の実証②—重力レンズ効果の観察

大気や天候の影響を受けずに高い精度での天体観測が可能なハッブル宇宙望遠鏡が、遠方にある天体からの光が、それよりも手前にある銀河の重力によって曲げられリング状などに見える現象（重力レンズ効果）の観察に成功、「巨大な質量をもつ天体のそばでは、その重力の影響により光が曲げられる」との予言は実証された。



遠方にある天体

銀河などの天体

ハッブル宇宙望遠鏡から見える画像

手前の銀河の重力によって曲がる光

ハッブル宇宙望遠鏡

ハッブル宇宙望遠鏡が撮影した重力レンズ効果。青くリング状に見えるのが奥にある天体が出した光。手前の銀河(白い部分)の重力によって曲げられたために見えるもので、「アインシュタイン・リング」と呼ばれている。

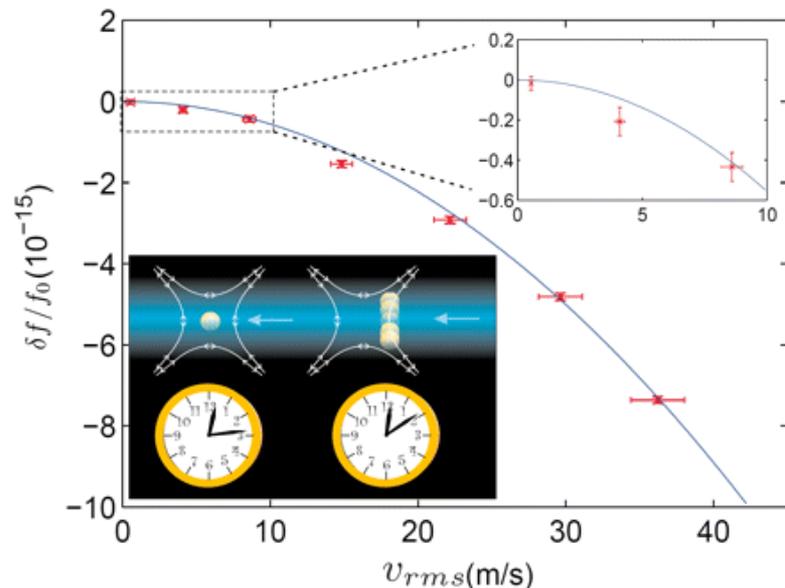
Optical Clocks and Relativity

C. W. Chou,* D. B. Hume, T. Rosenband, D. J. Wineland

Observers in relative motion or at different gravitational potentials measure disparate clock rates. These predictions of relativity have previously been observed with atomic clocks at high velocities and with large changes in elevation. We observed time dilation from relative speeds of less than 10 meters per second by comparing two optical atomic clocks connected by a 75-meter length of optical fiber. We can now also detect time dilation due to a change in height near Earth's surface of less than 1 meter. This technique may be extended to the field of geodesy, with applications in geophysics and hydrology as well as in space-based tests of fundamental physics.

Albert Einstein's theory of relativity forced us to alter our concepts of reality. One of the more startling outcomes of the theory is that we have to give up our notions of simultaneity.

This is manifest in the so-called twin paradox (*I*), in which a twin sibling who travels on a fast-moving rocket ship returns home younger than the other twin. This "time dilation" can be



0

24 SEPTEMBER 2010 VOL 329 SCIENCE www.sciencemag.org

