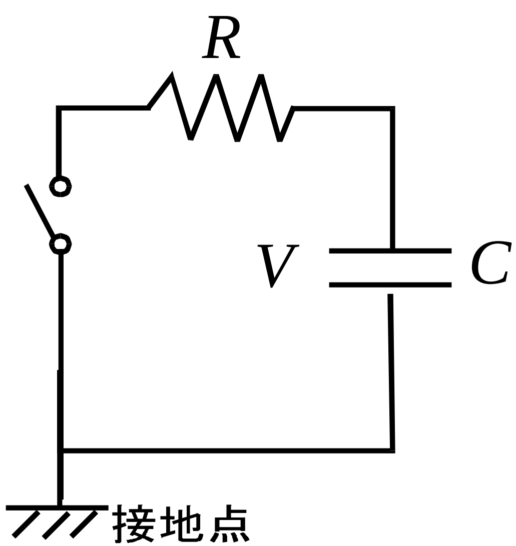
電磁場のエネルギー

コンデンサーに蓄えられたエネルギー



電位差がVのコンデンサーを、時刻 $t=0$ に放電させる。

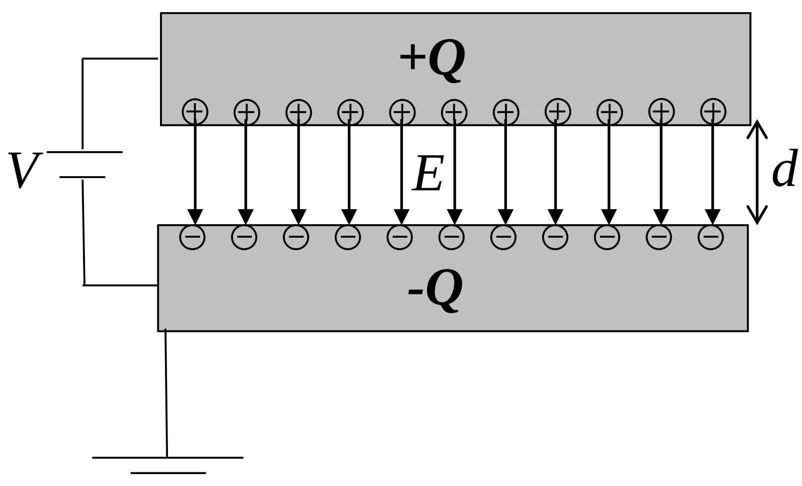
$$I(t)=\frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$U=\int_0^\infty RI^2(t)dt=\frac{V^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}}dt$$

$$=\frac{V^2}{R}\left[-\frac{RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{2}CV^2$$

電場のエネルギー密度



$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}, \quad V = Ed \quad \text{より}$$

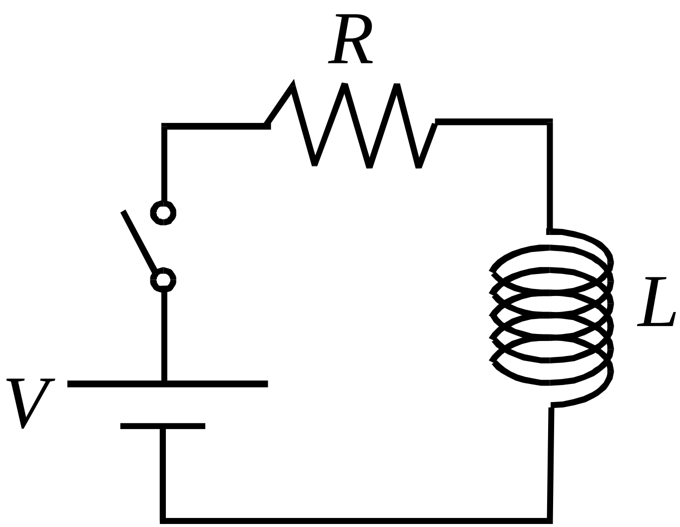
$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{d} (Ed)^2$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \times Ad$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \times (\text{電場の存在する体積})$$

エネルギー密度 $u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$ で静電エネルギーが空間に蓄えられている

コイルに蓄えられたエネルギー



コイルに流れる電流は、$I(t)=\dfrac{V}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$

コイルに生ずる誘導起電力は

$$V_C(t)=L\frac{dI(t)}{dt}=Ve^{-\frac{L}{R}t}$$

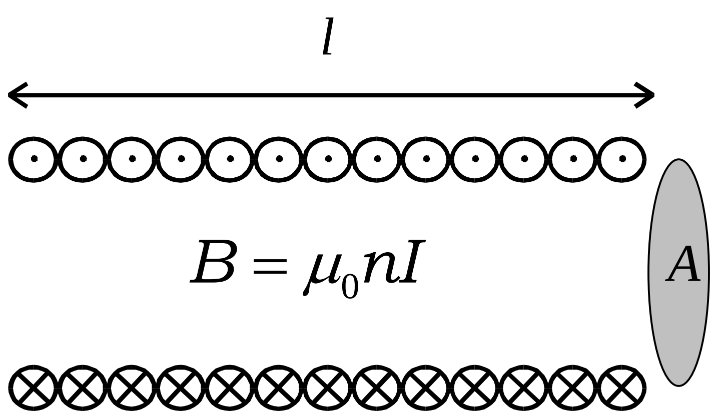
したがって、コイルに蓄えられたエネルギーは

$$U=\int_0^{\infty}V_C(t)I(t)dt=\frac{V^2}{R}\int_0^{\infty}e^{-\frac{R}{L}t}(1-e^{-\frac{R}{L}t})dt$$

$$=\frac{V^2}{R}\left[-\frac{L}{R}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{L}{2R}e^{-\frac{2R}{L}t}\right]_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{2}L\frac{V^2}{R^2}=\frac{1}{2}LI^2\quad\left(I\equiv I(\infty)=\frac{V}{R}\right)$$

磁場のエネルギー密度



単位長さあたりの巻き数 : n

ソレノイドコイルのインダクタンスは

$$L = \mu_0 n^2 A l = \mu_0 n^2 \times (\text{体積})$$

コイルに流れる電流は $I = \dfrac{B}{\mu_0 n}$

よって、コイルに蓄えられたエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 \times (\text{体積})$$

$$= \underline{\frac{1}{2} \mu_0^{-1} B^2} \times (\text{体積})$$

磁場のエネルギー密度と解釈できる

電場と磁場のエネルギー（静電磁場の場合）

電場のエネルギー密度

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

コンデンサーに蓄えられたエネルギー

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

磁場のエネルギー密度

$$u = \frac{1}{2}\mu_0^{-1} B^2$$

コイルに蓄えられたエネルギー

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\Phi I$$

電磁場のエネルギー流

電磁場が単位時間、単位体積あたりに電流（物質系）になす仕事

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{E}\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$$

$$=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})-\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$=-\nabla\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\right)}_{\boldsymbol{S}\ \text{:ポインティングベクトル}}\underbrace{-\frac{\partial}{\partial t}\left(\overbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2}^{\text{電磁場のエネルギー密度}}\right)}_{\text{単位時間、単位体積あたりの電磁場のエネルギー変化}}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}=-\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\text{物質系のエネルギー密度}\right)+\left(\text{電磁場のエネルギー密度}\right)\right\}$$

Sをエネルギー流密度と考えれば、物質系を含めたエネルギー保存則が成立する

エネルギーはどこを流れるのか？

平成 21 年度修士課程入学試験問題
相関基礎科学系　　基礎科目

第４問　物理学（２）

図１のように x 軸方向に十分長い平行平板コンデンサー（間隔 d、幅 w、長さ l）にスイッチ、起電力 V の電池、および電球をつないだ回路を考える。電流は平板を x 軸と平行に一様に流れるものとする。コンデンサーの間隔 d は十分小さく、端の影響は無視できるものとする。また、電球以外の電気抵抗は無視できるほど小さいものとする。真空の誘電率を ε_0、真空の透磁率を μ_0 として、以下の設問（１）～（８）に答えよ。

図１

Ｉ．スイッチを入れてから十分時間が経ち、コンデンサーが一様に帯電するとともに、回路には定常電流 I が流れているとする。

（１）　この回路の消費電力を求めよ。

（２）　コンデンサー内の電場 $\boldsymbol{E}$ の向きと大きさ、および x 軸方向の単位長さあたりの電気容量 C を求めよ。

（３）　コンデンサー内の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の向きと大きさ、およびこの回路の x 軸方向の単位長さあたりの自己インダクタンス L を求めよ。

（４）　この回路に蓄えられているエネルギーを、C、L、V、I、l を用いて表せ。

（５）　ポインティングベクトル $\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ は、単位時間に単位面積を通過するエネルギーの流れを表す。コンデンサー内のポインティングベクトル $\boldsymbol{S}$ の向きと大きさを求めよ。

（６）　設問（５）の結果より、このコンデンサー内の x 軸に垂直な断面を単位時間に通過するエネルギーを求めよ。

(1) $P = VI$

(2) $E = \dfrac{V}{d}$　$C = \varepsilon_0 \dfrac{w}{d}$

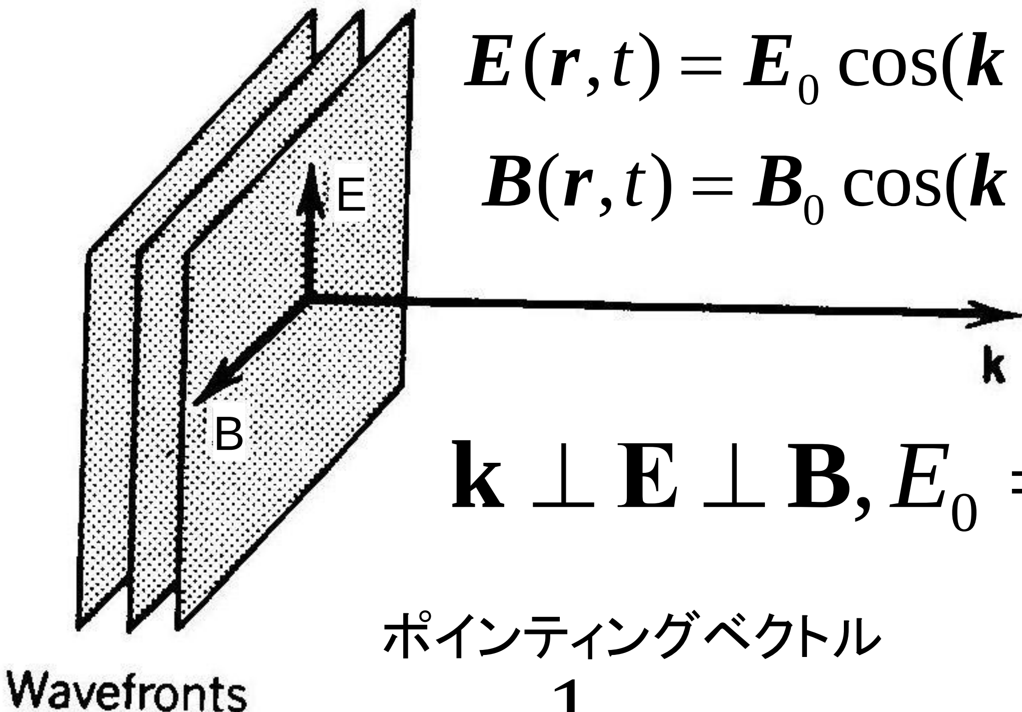
(3) $B = \mu_0 \dfrac{I}{w}$　$L = \mu_0 \dfrac{d}{w}$

(4)
$$U = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right)\times dwl$$
$$= \left(\frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{2}LI^2\right)\times l$$

(5) $S = \dfrac{EB}{\mu_0} = \dfrac{VI}{wd}$

(6) $S \times wd = VI$

電磁波のエネルギー



$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}]$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}_0 \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}]$$

$\boldsymbol{k}$: 波数ベクトル
（wave vector）

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{E} \perp \mathbf{B}, E_0 = cB_0$$

ポインティングベクトル

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\frac{\mathbf{k}}{k}$$

電磁波の強度
（intensity）

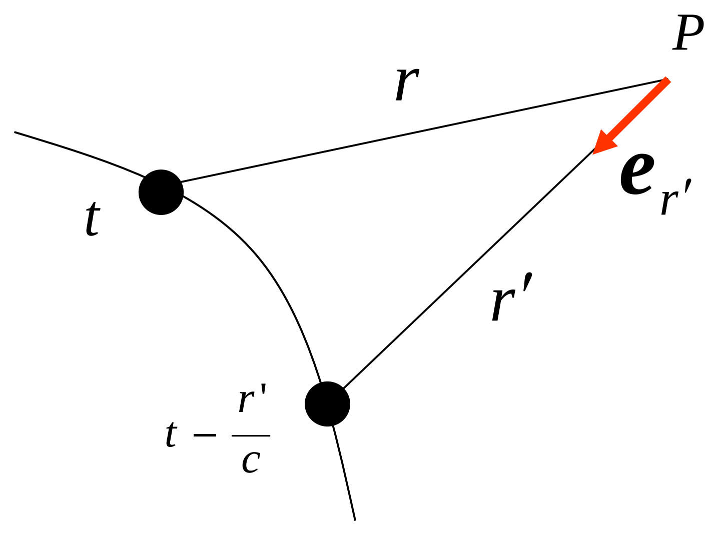
$$I \equiv < |\mathbf{S}| >_{\text{時間平均}} = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2$$

リエナール-ヴィーヒェルトポテンシャル（ファインマン物理学Ⅱ第3章）

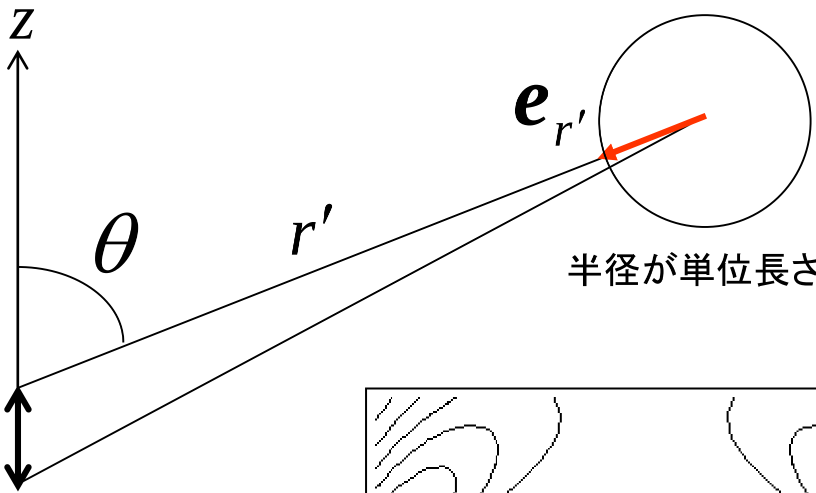
輻射を表す

$$\boldsymbol{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r'^2}\right) + \boxed{\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{e}_{r'}}\right]_{t-\frac{r'}{c}}$$

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\boldsymbol{e}_{r'} \times \boldsymbol{E}}{c}$$

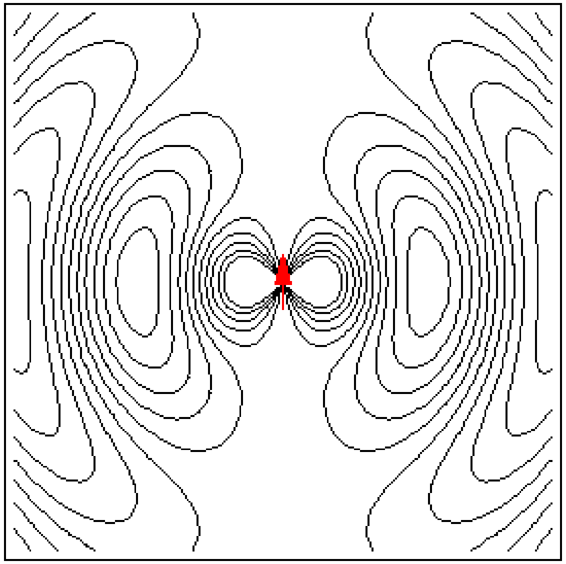


振動する電気双極子の放射パワー



振動する電気双極子

$$p = p_0 \cos \omega t$$



放射電磁波の電場

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{rad}} \cong -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{e}_{r'}\right]_{t-\frac{r'}{c}}$$

放射電磁波強度の時間平均

$$\overline{\boldsymbol{S}} \equiv \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{S}\right| = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2$$

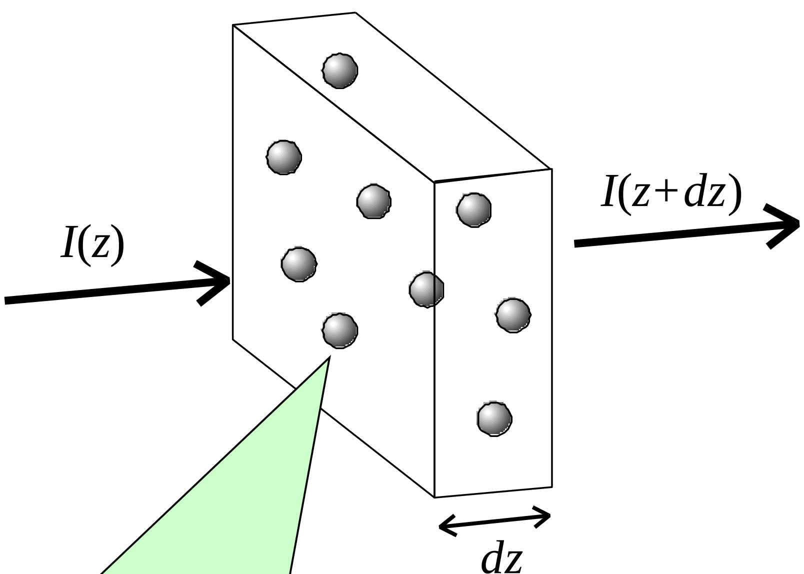
電場の振幅

放射電磁波のパワー

$$P = \int \overline{S}\, d\Omega = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

散乱（吸収）断面積

原子（分子）1個が単位時間に放射するエネルギーをP[W]、
原子（分子）の密度をnとする。



原子（分子）を仮想的に断面積がσの吸収体と考えるなら、単位時間に吸収するエネルギーは$P = I\sigma$となる。

dzの厚さを通過する際に吸収される単位面積あたりのエネルギー

$$I(z) - I(z+dz) = Pndz$$

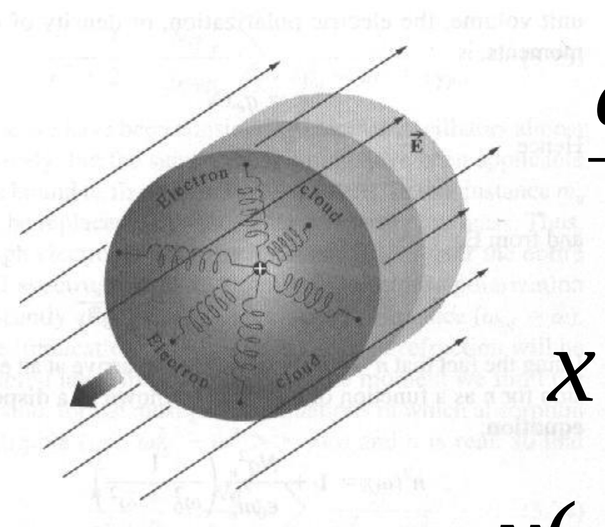
$$\rightarrow \frac{dI}{dz} = -n\frac{P}{I}I = -n\sigma I$$

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{I}}$$

原子（分子）1個の吸収断面積

$$I(z) = I_0 e^{-n\sigma z} = I_0 e^{-\alpha z}$$

分極の調和振動子モデル
（ローレンツモデル）



$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=-\frac{e}{m}E_0e^{-i\omega t}$$

$x=x(\omega)e^{-i\omega t}$とおいて代入すると

$$x(\omega)=\frac{e}{m}\cdot\frac{E_0}{\omega^2+2i\gamma\omega-\omega_0^2}$$

原子（分子）の電気双極子

$$p=-ex(\omega)e^{-i\omega t}=-\frac{e^2}{m}\cdot\frac{E}{\omega^2+2i\gamma\omega-\omega_0^2}e^{-i\omega t}$$

振動する電気双極子の振幅

レイリー散乱とトムソン散乱

原子のローレンツモデルより、原子の双極子モーメントの振幅は

$$p_0 = -\frac{e^2}{m}\cdot\frac{E_0}{\omega^2 + 2i\gamma\omega - \omega_0^2} \xrightarrow{|\omega-\omega_0|>>\gamma} \frac{e^2}{m}\frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

振動する電気双極子の放射パワーは

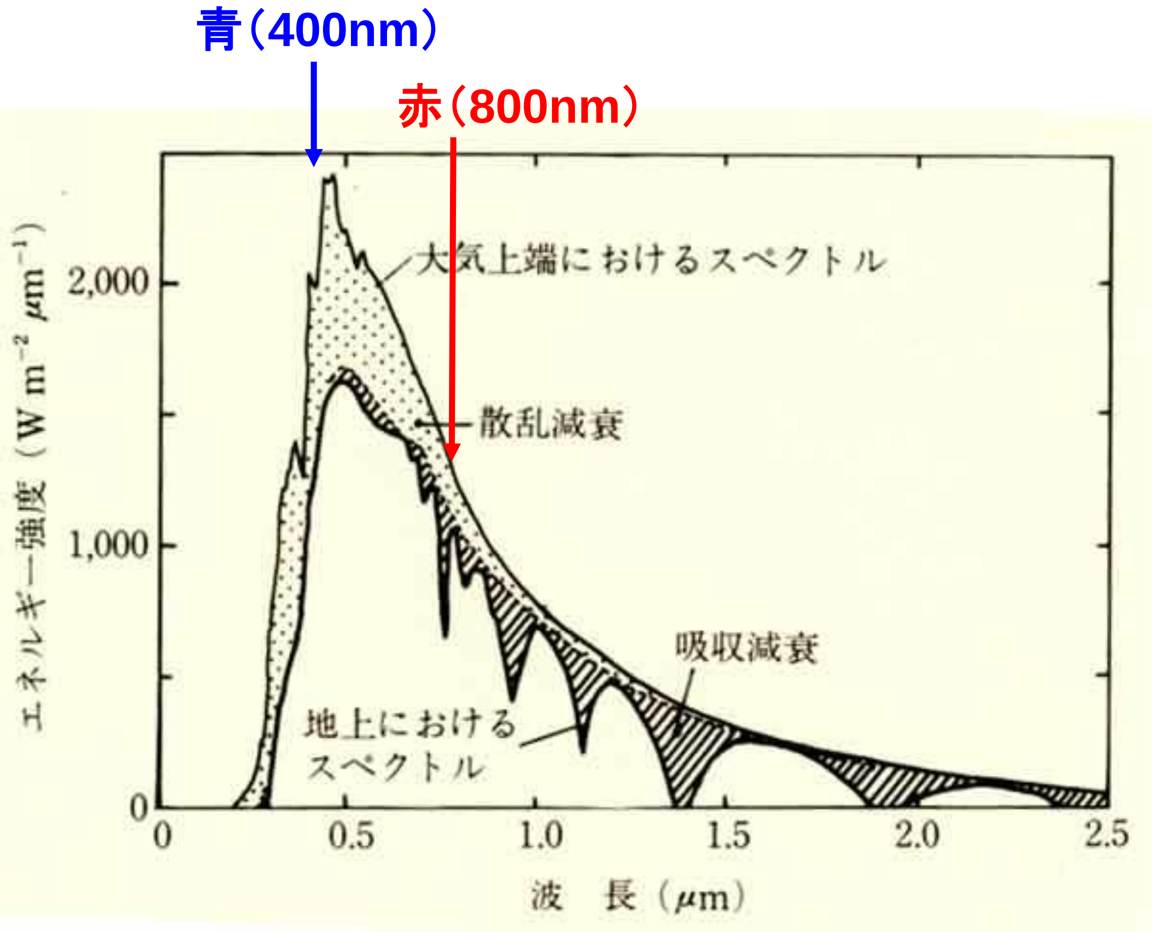
古典電子半径

$$P = \frac{p_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 \cdot \frac{8\pi r_0^2}{3}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \qquad \left(r_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \right)$$

原子1個の散乱断面積は

$$\sigma = \frac{P}{I} = \frac{8\pi r_0^2}{3}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} = \begin{cases} \dfrac{8\pi r_0^2}{3}\dfrac{\omega^4}{\omega_0^4} & (\omega << \omega_0)\ \text{レイリー散乱} \\ \dfrac{8\pi r_0^2}{3} & (\omega >> \omega_0)\ \text{トムソン散乱} \end{cases}$$

晴れた空が青いのはなぜだろう？



$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3}\frac{\lambda_0^4}{\lambda^4}$$

それは、レイリー散乱断面積が波長の４乗に反比例するから

「身近な気象の科学」図9.9より転載