

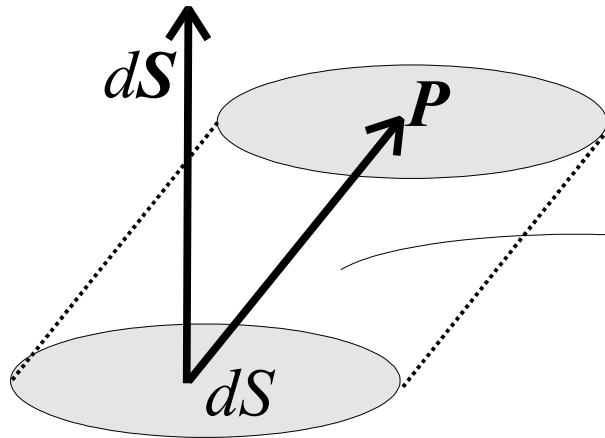
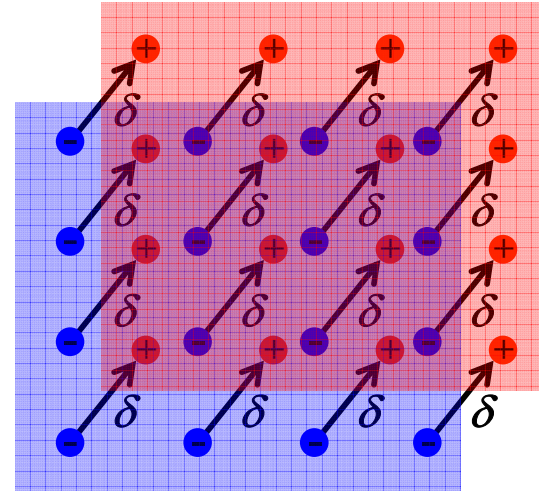
物質中の電磁場

分極（ベクトル場）の定義

分極ベクトル P は、単位体積あたりの
双極子モーメント $p = q\delta$ の和

$$P \equiv Np$$

N : 双極子モーメントの密度



$$P \cdot dS = Nq\delta \cdot dS$$

$$= Nq \times \delta dS \cos \theta$$

面素 dS を通過した電荷の量

分極電流密度

分極の時間微分は、電流密度の定義そのものである
(分極電流密度)

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{j}_P$$

この分極電流は、アンペールの法則の \mathbf{j} に含めなければならぬ

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ も含める

分極電荷

(分極)電荷の保存則より

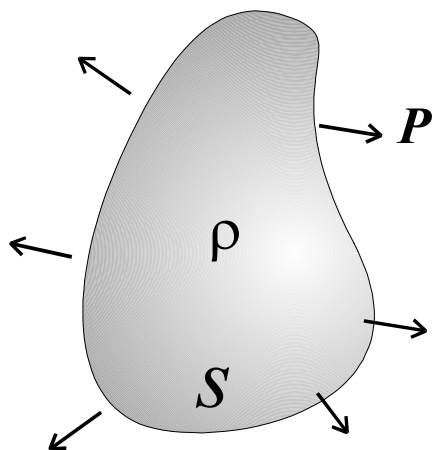
$$\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \rightarrow \int_S \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_P dV$$

$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ 代入

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_P dV$$

$$\rightarrow \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \rho_P dV \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_P$$

分極電荷密度



この分極電荷密度は、ガウスの法則の ρ に含めなければならない。

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \leftarrow -\nabla \cdot \mathbf{P} \text{ も含める}$$

磁化(ベクトル場)の定義

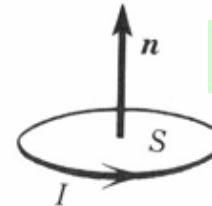
磁化ベクトル M は、単位体積あたりの磁気モーメント $m = ISn$ の和

$$M \equiv Nm$$

N : 磁気モーメントの密度

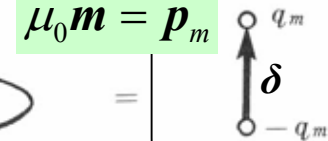
$$m = ISn$$

E-B対応



$$p_m = q_m \delta$$

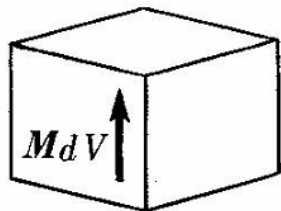
E-H対応



$$\mu_0 m = p_m$$

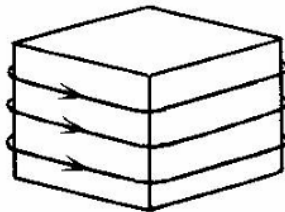
図 3.21 微小環状電流と等価な磁気双極子

表面電流密度: M



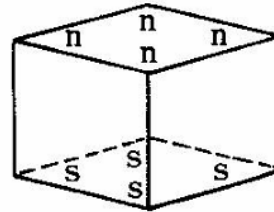
(a)

E-B対応



(b)

E-H対応



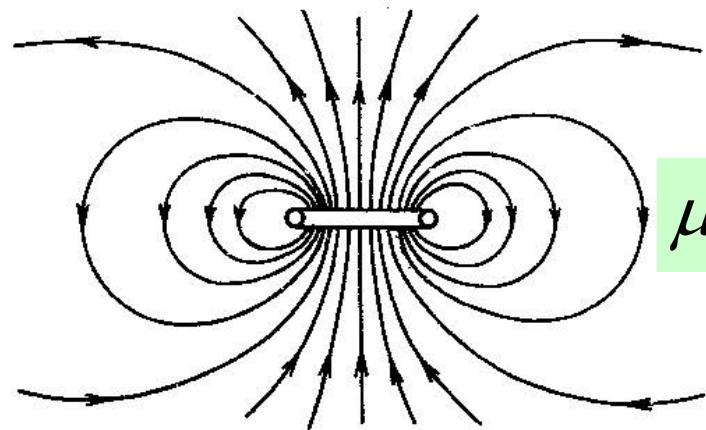
(c)

図 5.13 磁性体の磁気モーメント (a) と等価な磁化電流 (b) および磁極 (c)

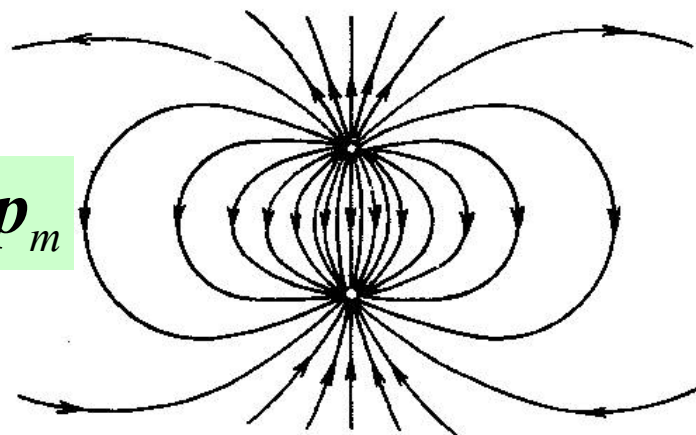
M が一様な場合、 M の大きさは、**表面電流密度** (磁化の方向の単位長さあたりの表面電流)に対応する。

E-B対応とE-H対応の等価性

(例1) 磁気モーメントが外部につくる磁場



$$\mu_0 \mathbf{m} = \mathbf{p}_m$$



ビオ・サバルの法則

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{e}_r}{r^2} dV$$



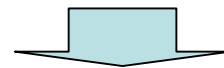
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} (3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r - \mathbf{m})$$

ただし真空中
(磁性体の外部)

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

磁場のクーロンの法則(E-H対応)

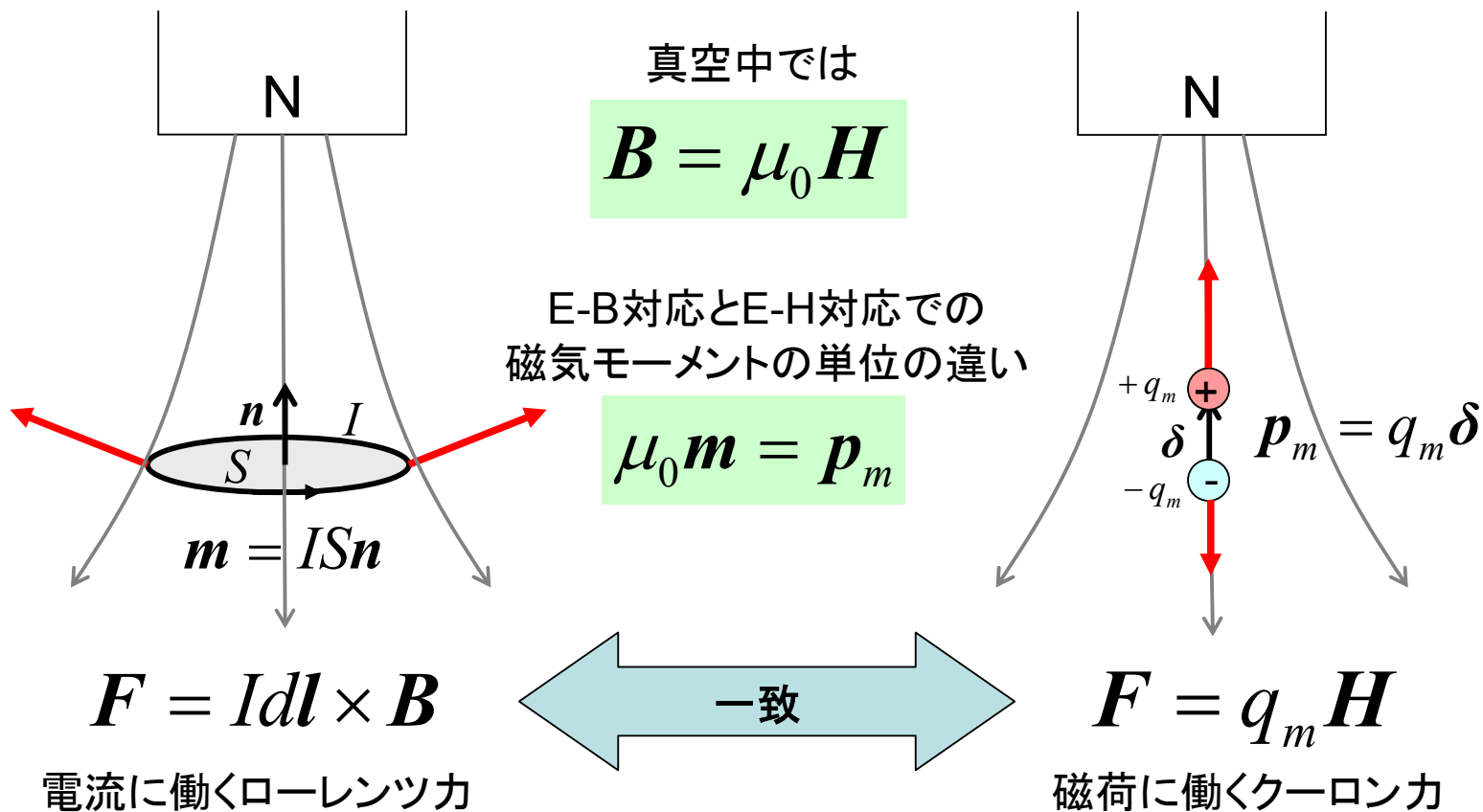
$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{\rho_m \mathbf{e}_r}{r^2} dV$$



$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{1}{r^3} (3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r - \mathbf{p}_m)$$

E-B対応とE-H対応の等価性

(例2) 磁気モーメントに働く力



磁化電流密度

ある平面Sを貫く磁化電流は、その平面を囲む閉曲線を絡んでいる磁化電流のみが寄与する

$$\int_S \mathbf{j}_M \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{r}$$

磁化電流密度

ところで、ストークスの定理より

$$\oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{S}$$

したがって、任意の平面Sにおいて、

$$\int_S \mathbf{j}_M \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{j}_M = \nabla \times \mathbf{M}$$

←これも、マクスウェル方程式の j に含める (E-B対応の場合)

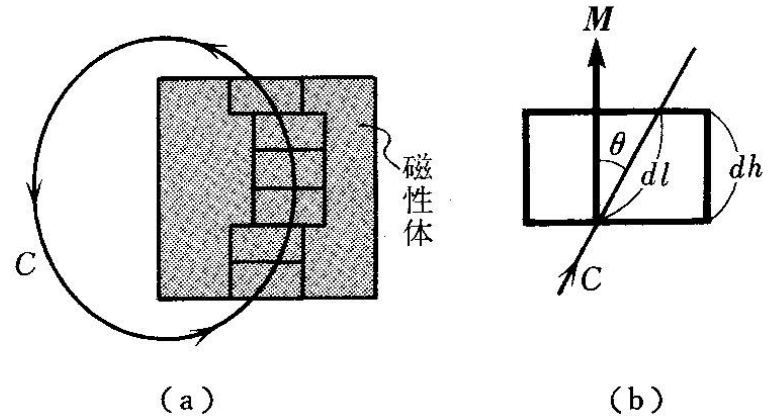


図 5.26 (a) 磁性体を通る積分路 C . C が貫く微小体積の側面の磁化電流が C と絡む. (b) 微小体積要素

加藤正昭「電磁気学」東大出版会

分極と磁化がある場合の マクスウェル方程式

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{代入} \\ -\nabla \cdot \mathbf{P} \end{array}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) \text{ 代入}$$

分極と磁化がある場合の マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot (\mathbf{P} + \varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_{\text{自由}}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j}_{\text{自由}} + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{P} + \varepsilon_0 \mathbf{E})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

電束密度と磁場

次のベクトル場を便宜的に定義してみる

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

電束密度

$$\mathbf{H} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

磁場

(補助場by太田)

すると、マクスウェル方程式は以下のように簡単になったように見える

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{自由}} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{自由}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

英語版wikipedia 「Maxwell Equations」 より

Table of 'microscopic' equations

Formulation in terms of **total** charge and current^[note 2]

Name	Differential form	Integral form
Gauss's law	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q(V)}{\epsilon_0}$
Gauss's law for magnetism	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$
Maxwell–Faraday equation (Faraday's law of induction)	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_S(\mathbf{B})}{\partial t}$
Ampère's circuital law (with Maxwell's correction)	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_S + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_S(\mathbf{E})}{\partial t}$

Here, in agreement with the common definition, it is assumed that one works in a system where the integration regions are constant. for example, $\frac{\partial \Phi_S(\mathbf{B})}{\partial t} := \iint_S \frac{\partial(\mathbf{B})}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$. However, exactly this equation, and *not* $\frac{\partial \Phi_S(\mathbf{B})}{\partial t} := \frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \mathbf{B}(t)$ would also be true, if S were to depend on time as well.

Table of 'macroscopic' equations

Formulation in terms of **free** charge and current

Name	Differential form	Integral form
Gauss's law	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$	$\oiint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_f(V)$
Gauss's law for magnetism	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$
Maxwell–Faraday equation (Faraday's law of induction)	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_S(\mathbf{B})}{\partial t}$
Ampère's circuital law (with Maxwell's correction)	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{f,S} + \frac{\partial \Phi_S(\mathbf{D})}{\partial t}$

Proof that the two general formulations are equivalent

[\[edit\]](#)

The two alternate general formulations of Maxwell's equations given above are mathematically equivalent and related by the following relations:

$$\begin{aligned} \rho_b &= -\nabla \cdot \mathbf{P}, \\ \mathbf{J}_b &= \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \\ \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \\ \rho &= \rho_b + \rho_f, \\ \mathbf{J} &= \mathbf{J}_b + \mathbf{J}_f, \end{aligned}$$

where \mathbf{P} and \mathbf{M} are [polarization](#) and [magnetization](#), and ρ_b and \mathbf{J}_b are bound charge and current, respectively. Substituting these equations into the 'macroscopic' Maxwell's equations gives identically the microscopic equations.

2010年頃の日本語版wikipedia 「マクスウェル方程式」

定義

[編集]

電場の強度 $\mathbf{E}(t,\mathbf{x})$ 、磁束密度 $\mathbf{B}(t,\mathbf{x})$ とするとき、

$$\bullet \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\bullet \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\bullet \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\bullet \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}$$

全電荷(電流)密度なのか束縛された電荷(電流)密度
なのか明示されていない

の4つの式からなる方程式系を(微分形による)マクスウェルの方程式と言う。ここで \mathbf{D} は
電束密度、 \mathbf{H} は磁場の強度であって、それぞれ \mathbf{E} 、 \mathbf{B} と

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

これらは線形媒質のときにだけ成り立つ近似式に過ぎない

の関係にある。ただしここで ϵ はその媒質の誘電率、 μ は透磁率であって、真空中ではそれぞれ真空の誘電率 ϵ_0 および透磁率 μ_0 となる。また ρ は電荷密度、 \mathbf{j} は電流密度を表し、その間には電気量保存則(連続の方程式)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

が成り立つことが導かれる。

分極Pと電場Eの関係

空間依存性	空間対称性	波長依存性	線形性
均一 homogeneous	等方的 isotropic	非分散的 nondispersive	線形 linear
不均一 Inhomogeneous (ファイバー)	非等方的 anisotropic (複屈折性)	分散的 dispersive (吸収と分散)	非線形 nonlinear (SHGなど)

最も簡単な分極と電場の関係(近似)

空間的に均一、等方的、非分散的、線形の場合

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$$

χ : 電気感受率(electric susceptibility) ← 無次元量

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{P} + \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$\varepsilon \equiv \varepsilon_0 (1 + \chi)$: 誘電率(electric permittivity)

↑
真空の誘電率(electric constant)

誘電体中のマクスウェル方程式

空間的に均一、等方的、非分散的、線形の場合($\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$


$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

真空の誘電率 ε_0 を物質の誘電率 ε に置き換えただけ！

誘電体中の電磁波（平面波）

空間的に均一、等方的、非分散的、線形の場合 ($\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$)

波動方程式は $\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}$  平面波解の形 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ を代入

分散関係: $k = \epsilon \mu_0 \omega$

媒質中の光速: $v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi}}$ $\left(c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \right)$
(位相速度)

屈折率: $n \equiv \frac{c}{v_{\text{ph}}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{1 + \chi}$

典型的なガラスの分散特性

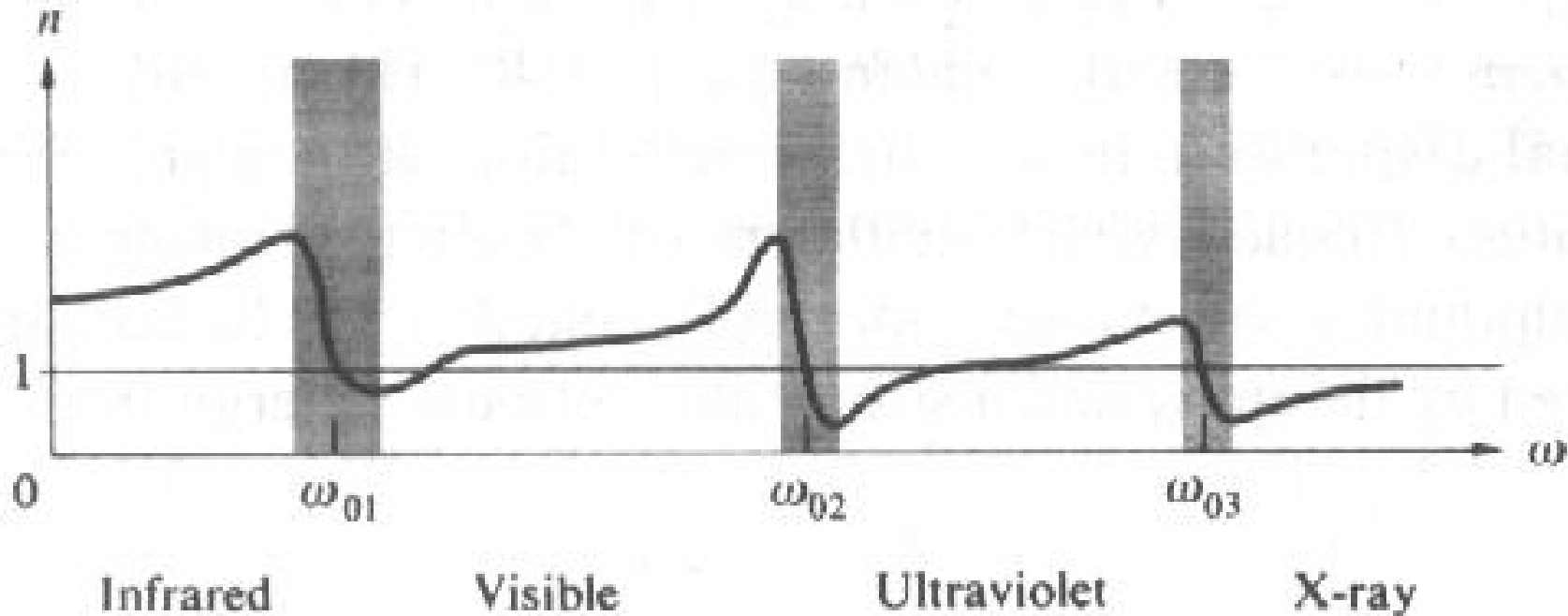
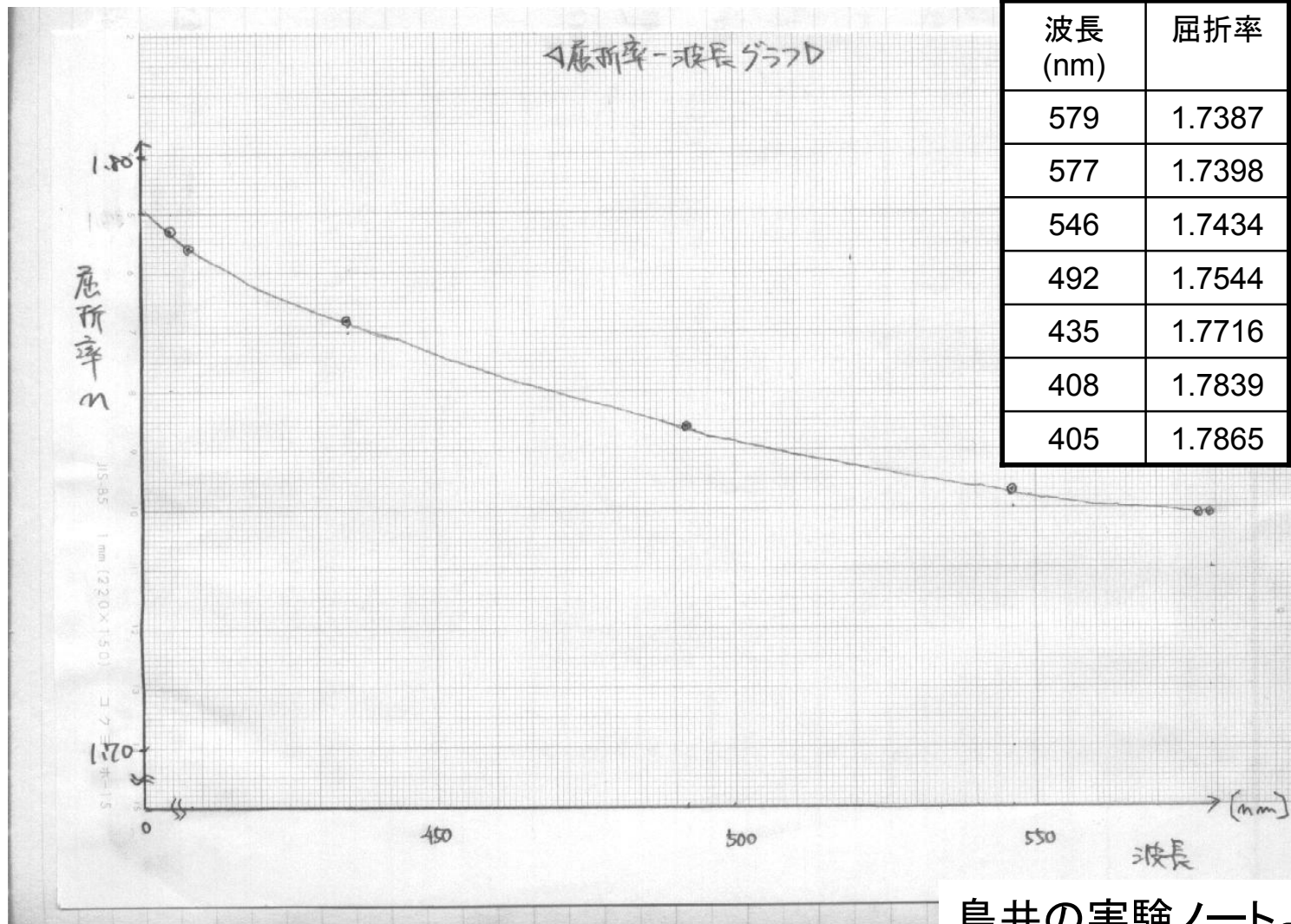


Figure 3.41 Refractive index versus frequency.

基礎実験(ガラスの屈折率)



比誘電率と屈折率の関係

TABLE 3.2 Maxwell's Relation

Gases at 0°C and 1 atm

Substance	$\sqrt{K_E}$	n
Air	1.000294	1.000293
Helium	1.000034	1.000036
Hydrogen	1.000131	1.000132
Carbon dioxide	1.00049	1.00045

Liquids at 20°C

Substance	$\sqrt{K_E}$	n
Benzene	1.51	1.501
Water	8.96	1.333
Ethyl alcohol (ethanol)	5.08	1.361
Carbon tetrachloride	4.63	1.461
Carbon disulfide	5.04	1.628

Solids at room temperature

Substance	$\sqrt{K_E}$	n
Diamond	4.06	2.419
Amber	1.6	1.55
Fused silica	1.94	1.458
Sodium chloride	2.37	1.50

Values of K_E correspond to the lowest possible frequencies, in some cases as low as 60 Hz, whereas n is measured at about 0.5×10^{15} Hz. Sodium D light was used ($\lambda = 589.29$ nm).

$$K_E \equiv \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi$$

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{K_E}$$

誘電体は必ず電荷に引き寄せられる

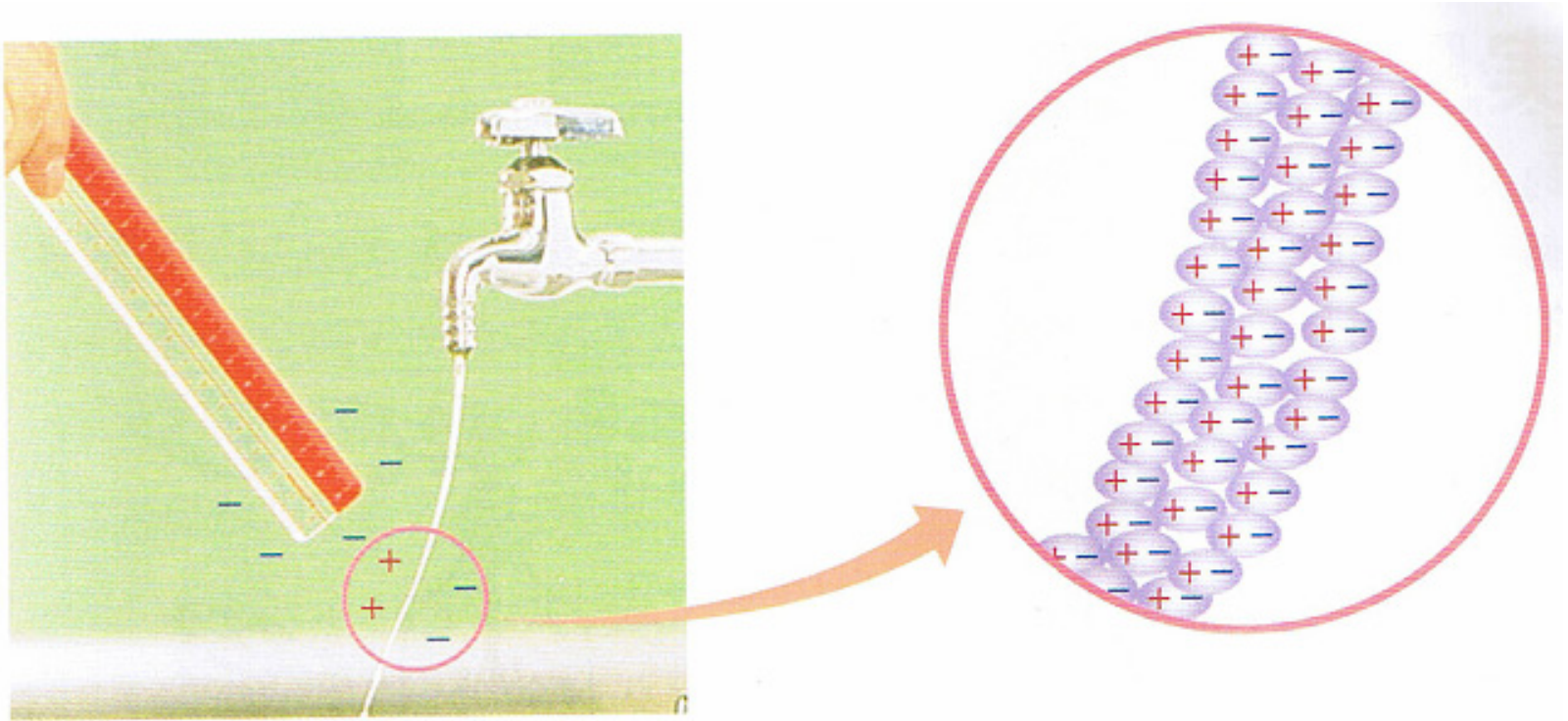
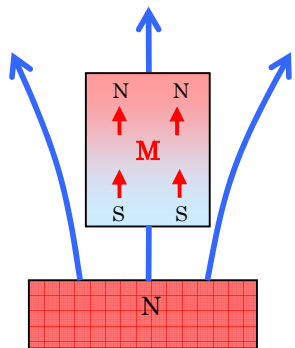


図 15 誘電分極によって帯電体に引きつけられる水道の水(極性をもつ分子の場合)

磁性体の分類

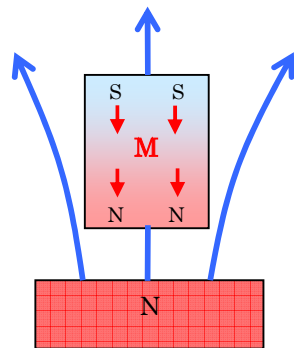
常磁性
paramagnetism



磁石に弱く
引きつけられる

(例)アルミニウム、
空気、液体酸素など

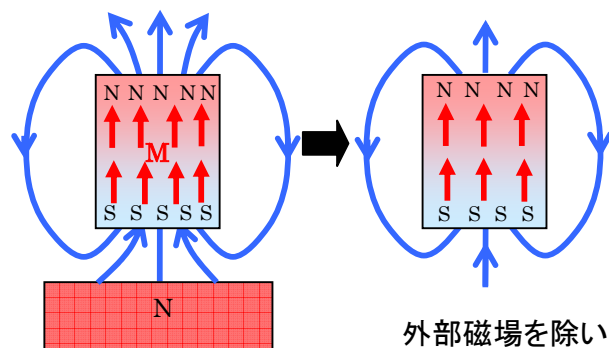
反磁性
diamagnetism



磁石に弱く
反発する

(例)水、銅、
グラファイトなど

強磁性
ferromagnetism



磁石に強く
引きつけられる

(例)鉄、コバルト、
ニッケル など

外部磁場を除いた
後にも磁化が残ると
永久磁石になる

磁化ベクトルMは外部磁場Hに近似的に比例

$$\text{磁化: } \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (\chi_m: \text{磁化率})$$

$$\text{磁束密度: } \mathbf{B} \equiv \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}$$

$$\text{透磁率: } \mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$$

磁化ベクトルMは
外部磁場Hに比例
しない(ヒステリシス
がある)

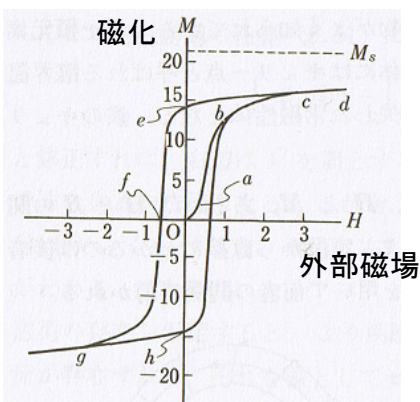


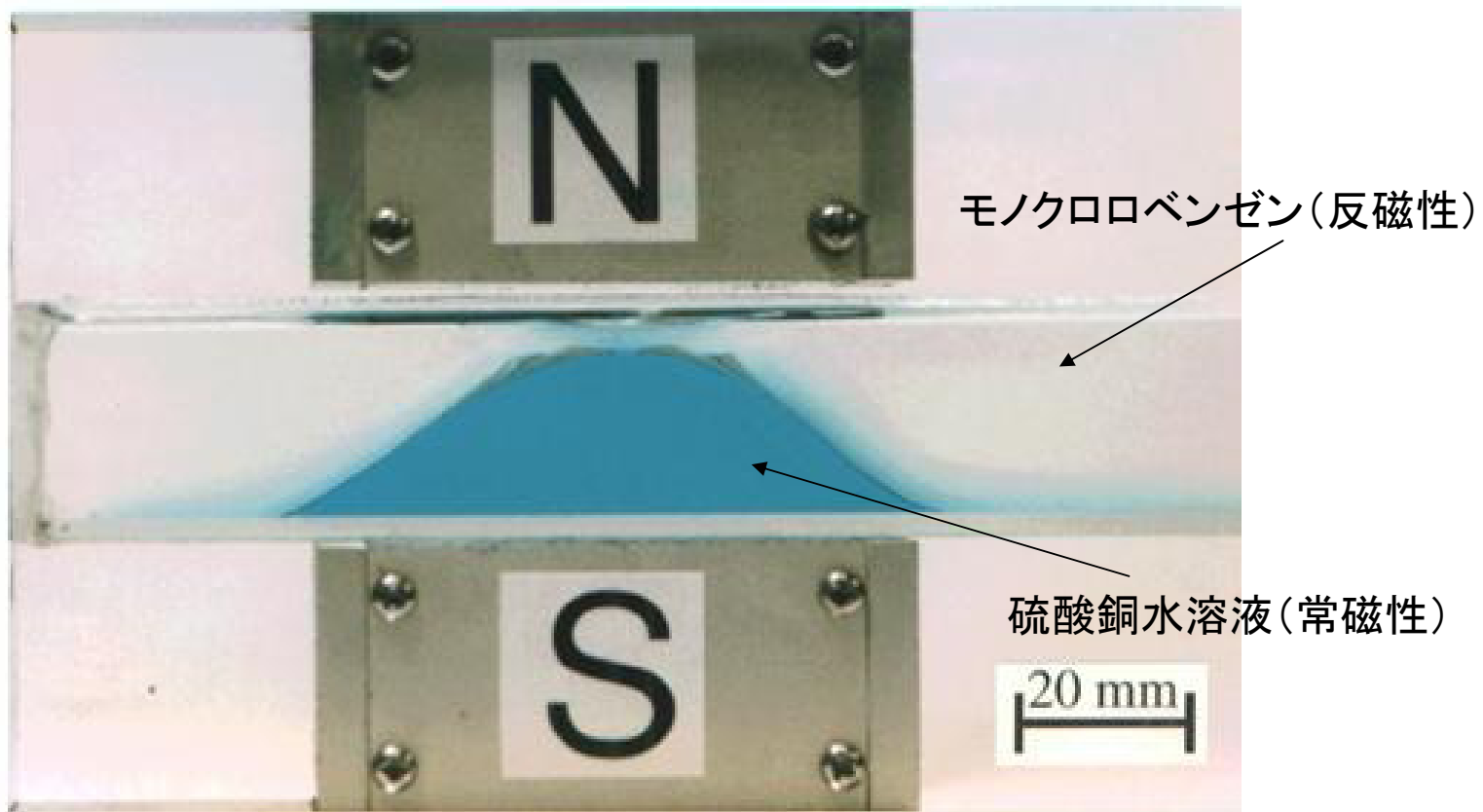
図 5.22 磁化曲線とヒステリシス・ループ。単位は横軸 (H) が Gauss/ μ_0 , 縦軸 (M) が キロ Gauss/ μ_0

磁石にくっつく常磁性体（液体酸素）



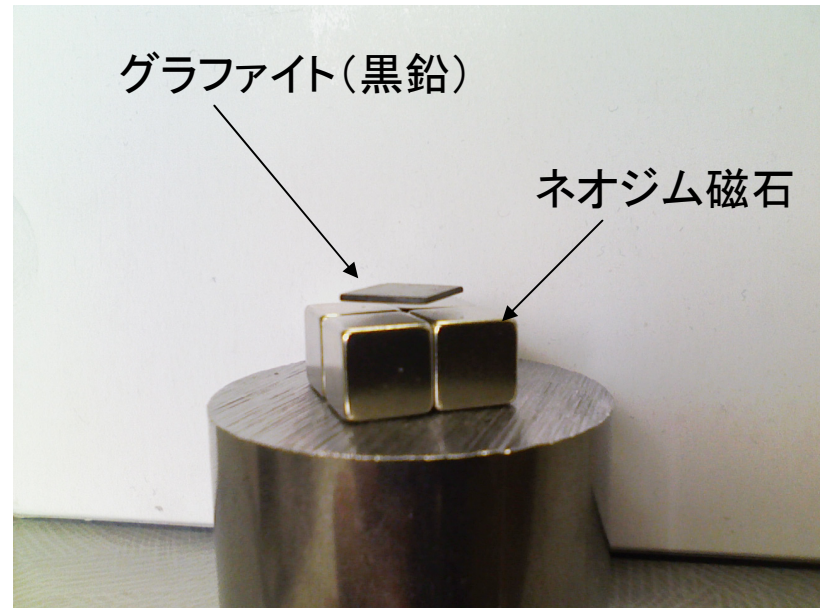
<http://www.mpec.jp/kyoiku/kyouzai/kagaku/oxygen.html>

モーゼ効果



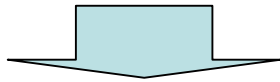
反磁性体の磁気浮上

カエル(水)



磁石の残留磁束密度の限界

大きな合成電子スピンを持てるのは鉄などの遷移金属で、その原子間距離は約2~3 Åであるから、その数密度は、 $10^{29}/\text{m}^3$ 程度であろう



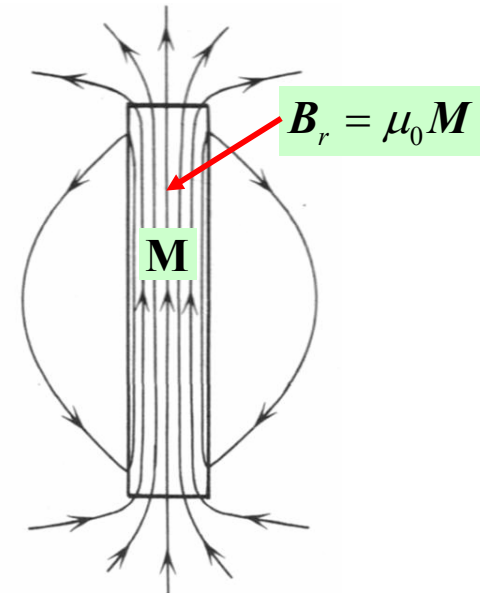
鉄原子1個あたりの不対電子の数は、2個(2ボーア磁子)程度だろう



磁石の残留磁束密度は、すべての電子スピンの同じ方向を向いたときが最大であろう。細長い棒磁石の場合は、

$$B = \mu_0 M \approx \cdot 4\pi \times 10^{-7} \cdot 2\mu_B \times 10^{29} \approx 2 \text{ T}$$

$$(\mu_B = h \times 1.4 \text{ MHz/G} = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T})$$



現在最高のネオジム磁石Nd₂Fe₁₄Bの表面磁束密度は1.5T