真空中の電磁場

マクスウェル方程式（微分形）

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)$$

基本的に、これだけ知っていればいい
（いつでも（物質中でも）正しい）

真空中のマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad \left(c \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \right)$$

波動方程式の導出（電場編）

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$ の両辺に左から∇をかけると

左辺＝$\nabla \times \left(\nabla \times \boldsymbol{E} \right) = \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{E} \right) - \left(\nabla \cdot \nabla \right) \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \boldsymbol{E}$

右辺＝$-\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \boldsymbol{B} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)$

$$= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

したがって $\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$ ←3次元波動方程式

波動方程式の導出（磁場編）

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$ の両辺に左から∇をかけると

左辺＝ $\nabla \times \left(\nabla \times \boldsymbol{B}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{B}\right) - \left(\nabla \cdot \nabla\right)\boldsymbol{B} = -\nabla^2 \boldsymbol{B}$

右辺＝$\dfrac{1}{c^2}\nabla \times \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \boldsymbol{E}\right) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

したがって $\nabla^2 \boldsymbol{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$ ←3次元波動方程式

波動方程式の解（振動する解）を探す

$$\boxed{\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}}$$

←3次元波動方程式

成分をあからさまに書けば

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\begin{pmatrix} E_x(\boldsymbol{r},t) \\ E_y(\boldsymbol{r},t) \\ E_z(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix} E_x(\boldsymbol{r},t) \\ E_y(\boldsymbol{r},t) \\ E_z(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix}$$

電場がy成分のみを持つ（y軸方向に偏光している）場合を考える

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_y(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y(\boldsymbol{r},t)$$

$$E_x(\boldsymbol{r},t) = E_z(\boldsymbol{r},t) = 0$$

ところで、マックスウェル方程式 $\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0$ より

$$\frac{\partial}{\partial x}E_x(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial}{\partial y}E_y(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial}{\partial z}E_z(\boldsymbol{r},t) = 0$$

であるので、これと $E_x(\boldsymbol{r},t) = E_z(\boldsymbol{r},t) = 0$ より、必然的に

$$\frac{\partial}{\partial y}E_y(\boldsymbol{r},t) = 0$$

となる。したがって、y軸方向を向いた電場の波は、y軸方向には空間依存性がない。つまり、電場の波はy軸方向に進行できない

↓

電磁波は横波

電場の波は$+x$軸方向に進行しているとする（z軸方向の空間依存性はないとする）と、波動方程式は1次元に帰着できる

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_y(x,t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y(x,t)$$

一般的な解の形は$E_y(x\pm ct)$と表せるが、単一の周波数（もしくは波長）で振動する解は

$$E_y(x,t)=E\cos(kx-\omega t) \quad \text{ただし} \quad c=\frac{\omega}{k}=\lambda f$$

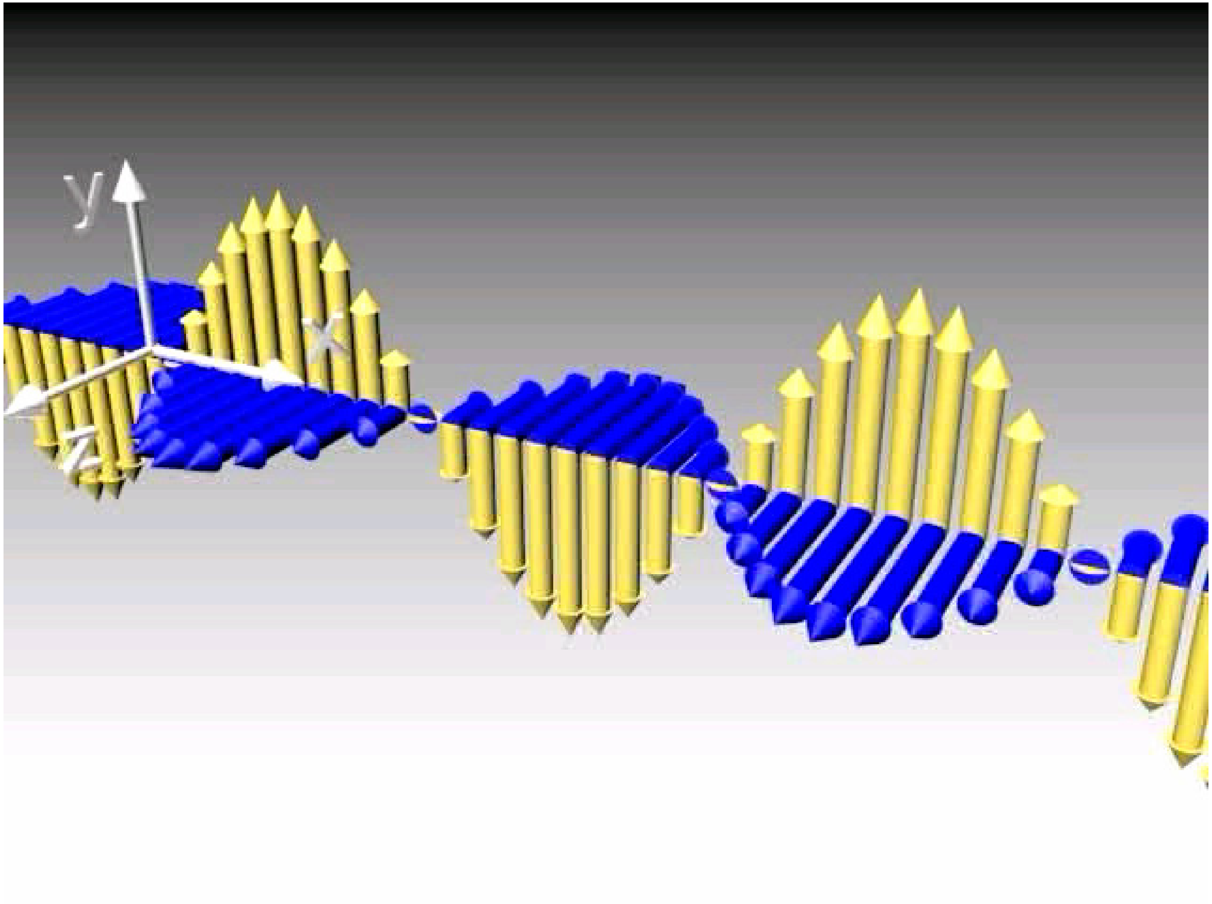
$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \ \text{:波数} \qquad \omega=2\pi f \ \text{:角周波数}$$

（λ :波長、 f :周波数）

対応する磁場の解は

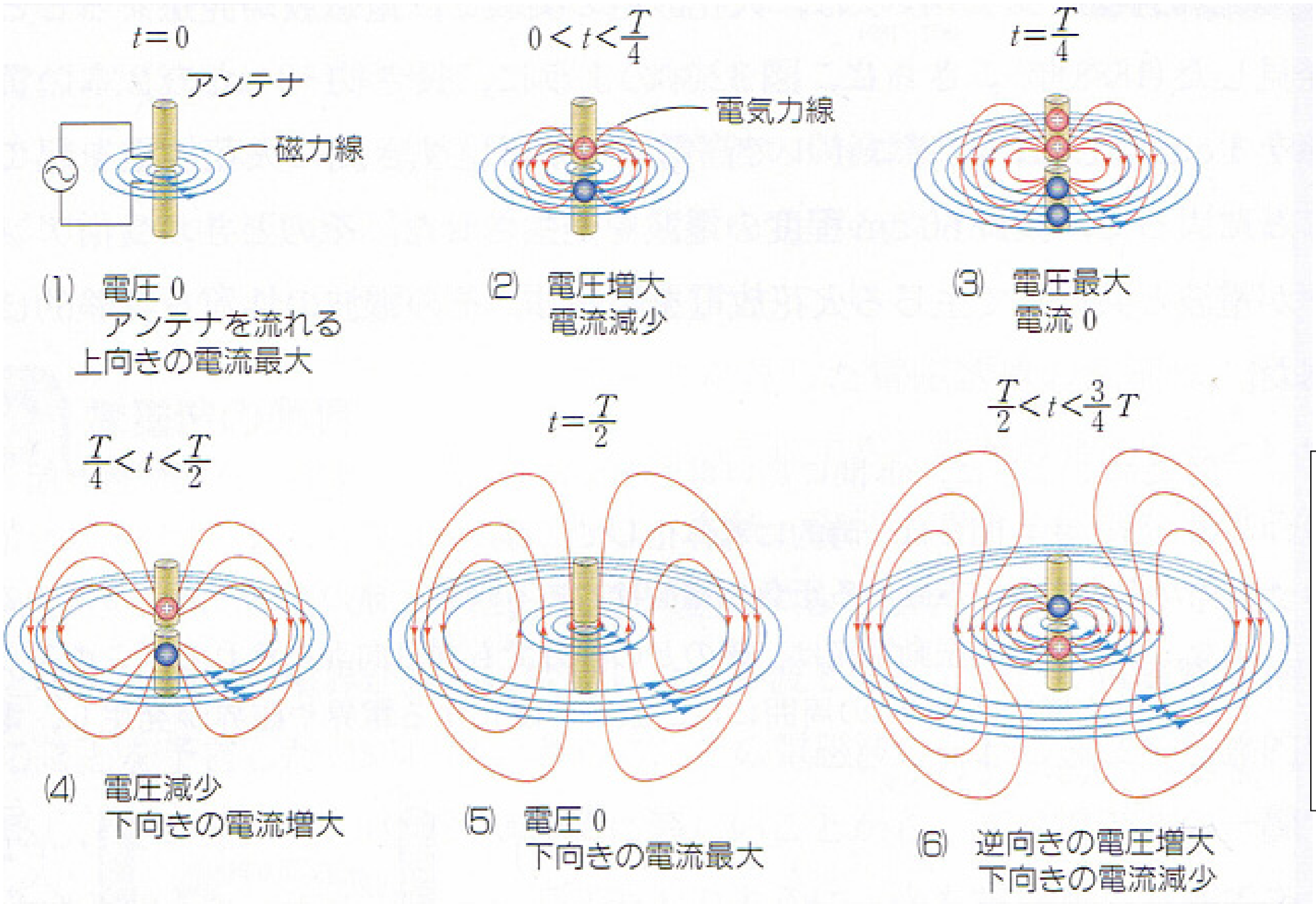
$$B_z(x,t)=B\cos(kx-\omega t) \quad \text{ただし} \quad B=E/c$$

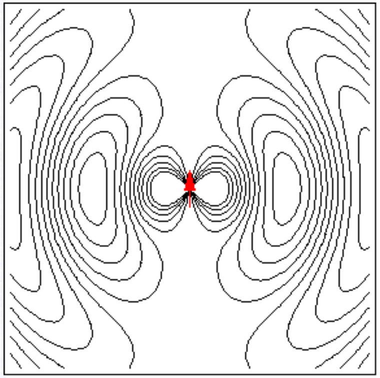
＋x方向に進行する電磁波



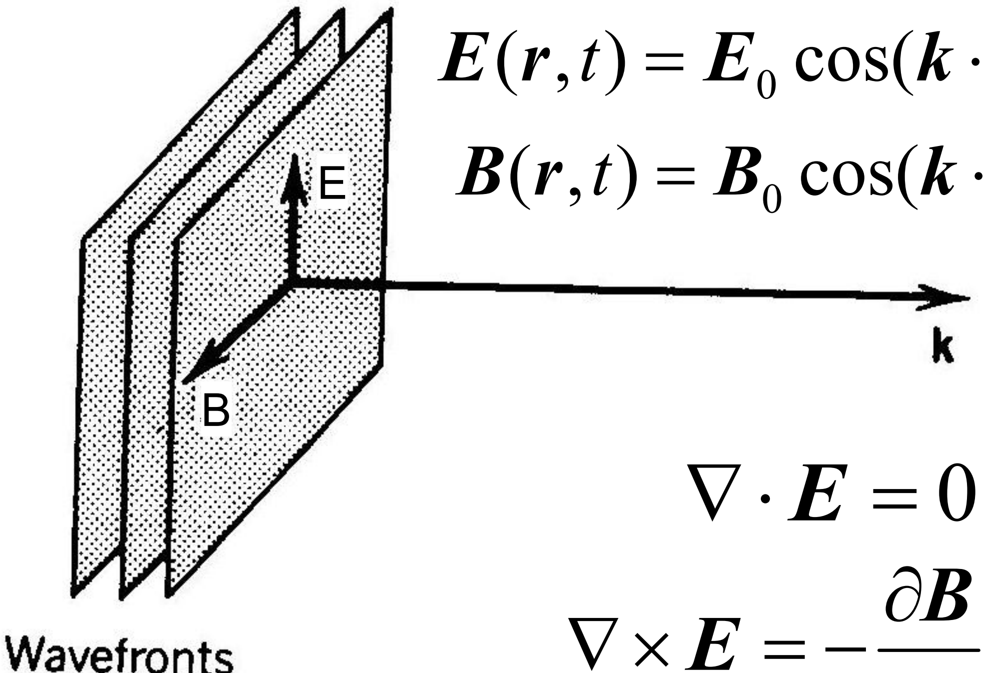
http://web.mit.edu/8.02t/www/

ダイポールアンテナによる電磁場の発生（「高等学校物理Ⅱ」（啓林館）p180）





$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{k}$の関係



$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}]$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}_0 \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}]$$

$\boldsymbol{k}$: 波数ベクトル
（wave vector）

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0 \quad \text{より} \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \text{より} \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \omega\boldsymbol{B}$$

したがって、$\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$, $\boxed{E_0 = cB_0}$

TEM（<u>T</u>ransverse <u>E</u>lectro<u>m</u>agnetic） wave