ベクトル解析の復習

ベクトル場の積分公式

ガウスの定理（Gauss' Theorem）←物理法則（law）ではない

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{A})dV$$

ストークスの定理（Stokes' Theorem） ←物理法則（law）ではない

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \left(\nabla\times\boldsymbol{A}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

ベクトル場の微分公式　その①

とりあえずこの3つは必ず覚えよう！

$$\nabla\times(\nabla\phi)=0$$ ←ストークスの定理で証明できる

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$$ ←ストークスの定理とガウスの定理で証明できる

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$ ←覚えるしかない

以下は公式ではなくラプラシアンの定義

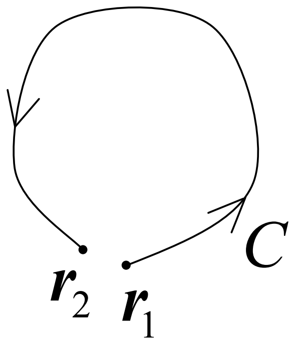
$$\nabla\cdot(\nabla\phi)\equiv\nabla^2\phi\,(\equiv\Delta\phi)$$

$$(\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\equiv\nabla^2\boldsymbol{A}\,(\equiv\Delta\boldsymbol{A})$$

$$\left(\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$\nabla\times\left(\nabla\phi\right)=0,\ \ \nabla\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{A}\right)=0$ の証明

（ファインマン物理学Ⅲ電磁気学、第3章7節）

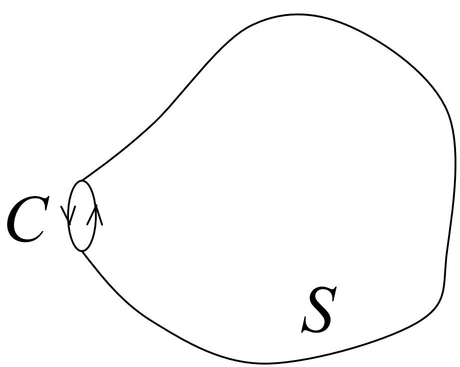


$$\phi(\boldsymbol{r}_2)-\phi(\boldsymbol{r}_1)=\int_{r_1}^{r_2}(\nabla\varphi)\cdot d\boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2$ のとき、左辺は0、右辺はストークスの定理より

$$\oint_C(\nabla\varphi)\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{C\text{が囲む面}}(\nabla\times\nabla\varphi)\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

上式が経路Cに依らず成立するので、被積分関数は常に0



$$\oint_C\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}$$ （ストークスの定理）

経路Cを無限小にすると、左辺は0、右辺はガウスの定理より

$$\oint_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{S\text{が囲む空間}}\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})dV=0$$

上式が閉曲面Sに依らず成立するので、被積分関数は常に0

ベクトル場の微分公式　その②

以下は覚えなくてよい。いつでも導出できる

$$\nabla \varphi\psi = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi$$

$$\nabla\cdot\left(\varphi\boldsymbol{A}\right) = (\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{A} + \varphi(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$$

$$\nabla\times\left(\varphi\boldsymbol{A}\right) = (\nabla\varphi)\times\boldsymbol{A} + \varphi(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

$$\nabla\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

覚えるべきは、通常のベクトル公式

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

ベクトル場の微分の裏技（Feynman, Ⅱ27-4）

ナブラ演算子が働くべき場を下つき文字（subscript）で表し、通常のベクトル公式に従って順番を自由に入れ替える

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E})=\nabla_B\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E})+\nabla_E\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E})$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\boldsymbol{E}\cdot(\nabla_B\times\boldsymbol{B}) \qquad \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{E}\times\nabla_E)$$

$$\downarrow$$

$$-\boldsymbol{B}\cdot(\nabla_E\times\boldsymbol{E})$$

各ナブラ演算子の右側には、自分が働くベクトル場しかないので、通常のナブラ演算子の記号に戻してもよい

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})$$

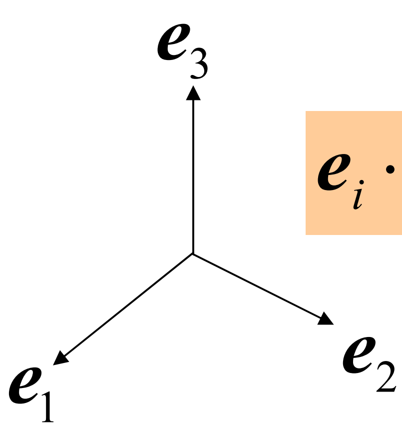
クロネッカーデルタ記号と内積

同じ添え字が２度出てきたら、その添え字に関して１から３までの和をとると約束する（アインシュタインの縮約記法）

$$\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i\boldsymbol{e}_i \equiv A_i\boldsymbol{e}_i$$

２つのベクトルの内積をアインシュタインの縮約を使って表現すると、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_i\boldsymbol{e}_i \cdot B_j\boldsymbol{e}_j = A_iB_j\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = A_iB_j\delta_{ij} = A_iB_i$$



$$\boxed{\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

クロネッカーデルタ記号

レビ・チビタ(Levi-Civita)記号と外積

レビ・チビタ記号(エディントンのイプシロン)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & (i,j,k) = (1,3,2),(3,2,1),(2,1,3) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

←(1,2,3)の偶置換

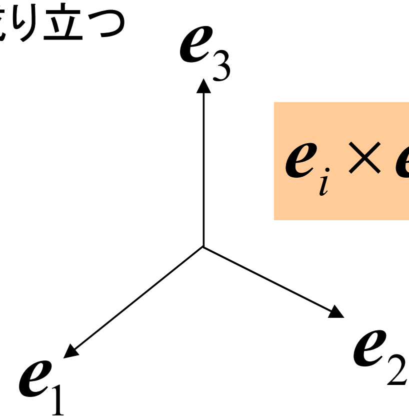
←(1,2,3)の奇置換

アインシュタインの縮約記法の下、以下の公式が成り立つ

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$



$$\boxed{\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k}$$

２つのベクトルの外積をアインシュタインの縮約とレビ・チビタ記号を使って表現すると、

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = A_i \boldsymbol{e}_i \times B_j \boldsymbol{e}_j = A_i B_j \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = A_i B_j \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k$$

ベクトルの３重積の公式の証明

スカラー３重積

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = A_i\boldsymbol{e}_i\cdot(B_j\boldsymbol{e}_j\times C_k\boldsymbol{e}_k)$$

ベクトル３重積

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = A_i\boldsymbol{e}_i\times(B_j\boldsymbol{e}_j\times C_k\boldsymbol{e}_k)$$

ベクトル場の微分公式の導出

$$\nabla \cdot \left(\phi \boldsymbol{A} \right) =$$

$$\nabla \times \left(\phi \boldsymbol{A} \right) =$$

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \right) =$$

マクスウェル方程式の復習

マクスウェル方程式（積分形）

$$\varepsilon_0 \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho dV$$

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \mu_0 \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

微分形と積分形は同値

$$\varepsilon_0 \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho dV \iff \varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho$$

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \iff \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \iff \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \mu_0 \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S} \iff \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)$$

古典物理(～1905)の全て

表 18-1　古典物理

マクスウェル方程式	
I. $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	(閉曲面を通る電束)＝(内部の電荷)/ε_0
II. $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$	(ループをめぐる $\boldsymbol{E}$ の線積分)＝$-\dfrac{d}{dt}$(ループを通る $\boldsymbol{B}$ の流束)
III. $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$	(閉曲面を通る $\boldsymbol{B}$ の流束)＝0
IV. $c^2\nabla\times\boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}+\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$	c^2(ループをめぐる $\boldsymbol{B}$ の積分)＝(ループを通る電流)/ε_0 $+\dfrac{d}{dt}$(ループを通る電束)
電荷の保存	
$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$	(閉曲面を通る電流の流束)＝$-\dfrac{d}{dt}$(内部の電荷)
力の法則	
$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$	
運動の法則	
$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{F}$,　ただし　$\boldsymbol{p}=\dfrac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$	(アインシュタインの修正によるニュートンの法則)
万有引力	
$\boldsymbol{F}=-G\dfrac{m_1m_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r$	

ファインマン物理学Ⅲ　電磁気学
第18章「マクスウェル方程式」p229

ファインマン物理学 I「力学」

第 15 章

特殊相対性理論

15-1　相対性原理

200 年以上もの間，ニュートンの運動方程式は，自然を正しく記述するものであると信じられてきた．これらの法則にあやまりがあるということがはじめて発見されたとき，同時に，それを修正する方法も発見されたのである．このあやまりを発見したのも，修正を加えたのも，アインシュタインであって，1905 年のことである．

ニュートンの第 2 法則は，

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

という方程式によってあらわされるが，それは m が一つの定数であるという暗黙の仮定の上にたっていた．しかし現在ではこの仮定は正しくはなく，一つの物体の質量は速度が大きいほど大きくなることがわかっている．アインシュタインの修正式では，m は

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{15.1}$$

である．ここに "静止質量" m_0 は，物体が運動していないときの質量，c は光の速さ，およそ 3×10^5 km/秒すなわちおよそ 186,000 マイル/秒である．

このことを覚え，問題がとけさえすればもうそれでいいという人達にとっては，相対性理論とはこれだけのものである――質量に補正を入れて，ニュートンの力学に変更を加えるだけのものである．上の式

マクスウェル方程式の特徴

- 電荷保存則を含んでいる
- 発散と回転で表現されている(ヘルムホルツの定理より解が一意的に求まる)
- 時間に依存しない場合(静電磁気の場合)は、クーロンの法則とビオ・サバールの法則と同値である
- 時間に依存する場合でも解はわかっている
- ローレンツ不変性を満たしている(方程式が座標系に依存しない)

ヘルムホルツの（分解）定理

任意のベクトル場Xは、回転ゼロの場（スカラー場の勾配）と発散ゼロの場（ベクトル場の回転）に一意的に分解できる

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_L + \boldsymbol{X}_T = -\nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{X}_L = 0 \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{X}_T = 0$$

無限遠でXが1/r²より早くゼロに収束するならば、

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV' \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'\times\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

ヘルムホルツの定理からの帰結

任意のベクトル場は、その発散と回転が与えられれば、一意的に定まる

回転のないベクトル場は、スカラー場の勾配で表わせる

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0, \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho / \varepsilon_0$$

静電場のクーロンの法則

$$\to \boldsymbol{E} = -\nabla \phi = -\nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dV' = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} dV'}$$

発散のないベクトル場は、ベクトル場の回転で表わせる

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

静磁場のビオ・サバールの法則

$$\to \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dV' = \boxed{\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} dV'}$$

マクスウェル方程式の解

マクスウェル方程式：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$$

その解：

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$\phi(1,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(2,t-r_{12}/c)}{r_{12}}dV_2$$

$$\boldsymbol{A}(1,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(2,t-r_{12}/c)}{r_{12}}dV_2$$

ファインマン物理学Ⅲ　電磁気学
第20章「電流と電荷のある場合の
マクスウェル方程式の解」p264

ファインマン物理学Ⅲ電磁気学 第20章　p263

「われわれはマクスウェル方程式を解いた。どんな電荷、電流があっても、上の積分によりポテンシャルが直接に分かり、微分して場が求められる。これでマクスウェル方程式は終わりである。(中略)電磁気の世界の中心はここにある。電気、磁気、光の完全な理論－動く電荷の作る場の完全な記述など－それはすべてここにある。力と美の点で完成された、マクスウェルのうち建てた建造物がここにある。これは恐らく物理学の最大の成功の一つである」

表記法（notation）

（例）電荷密度が与えられたときに、クーロンの法則と重ね合わせの原理から、任意の位置における電場を求める式

この講義

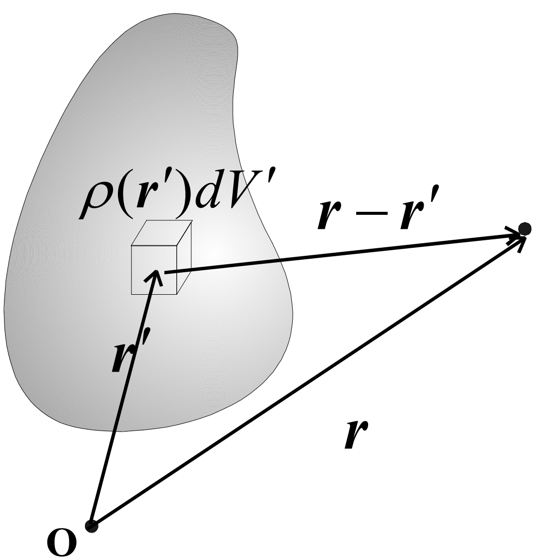
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}dV'$$

太田流

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\boldsymbol{x}')\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}dV'$$

ファインマン流

$$\boldsymbol{E}(1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(2)\boldsymbol{e}_{12}}{r_{12}^2}dV_2$$



デルタ関数を使おう！

＜3次元デルタ関数δ(*r* - *r’*)の定義＞

・$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$での値は無限大、それ以外ではゼロ

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\begin{cases}0 & (\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}') \\ \infty & (\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}')\end{cases}$$

・$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ を含む体積積分の値は1、含まなければゼロ

$$\int_V \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')dV=\begin{cases}1 & (\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'\text{を含む}) \\ 0 & (\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'\text{を含まない})\end{cases}$$

デルタ関数の例

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\theta(\varepsilon - |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$$

ヘヴィサイド関数

$$\theta(x) \equiv \begin{cases} 0 \ (x<0) \\ 1 \ (x>0) \end{cases}$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

$$\nabla\left(-\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$