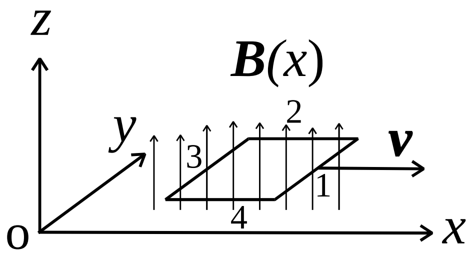
第４章　時間変化する電磁場

4.1 誘導起電力



今、図のように z 軸方向を向き、その大きさが x のみに依存する磁場 $\boldsymbol{B}(x) = B(x)\boldsymbol{e}_z$ を考え、この中で長方形の閉回路が速度 $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$ で x 軸方向に移動している状況を考える。導体内の電荷 q は、ローレンツ力

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(x) = qvB(x)\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z = -qvB(x)\boldsymbol{e}_y$$

を受ける。この力によって単位電荷が回路を一周する際に受ける仕事、つまり起電力を考える。ここでは、回路を一周する向きは磁場の方向（今は z 軸）に対して右ねじの向きと約束しておく。まず、ローレンツ力は y 軸に平行であるから、それと垂直な辺２と辺４を移動する際には仕事を受けない。辺１を移動する際に受ける仕事 dW_1、辺１の長さを a として

$$dW_1 = \int_{辺1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -vB(x_1)a$$

となる。同様に、辺３を移動する際に受ける仕事 dW_3 は $dW_3 = vB(x_3)a$ であるので、この回路の起電力 V は

$$V = dW_1 + dW_3 = -va\big(B(x_1) - B(x_3)\big)$$

と表せる。この起電力によって、V が正であれば磁場に対して右ねじの向きに電流が流れる。ところで、この回路を右ねじの向きに貫く**磁束** $\Phi \equiv \int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$ の単位時間あたりの変化量は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = vaB(x_1) - vaB(x_3) = va\big(B(x_1) - B(x_3)\big)$$

と書き表せる。よって、この回路に生じる起電力は、

$$V = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

と表される。このように回路を貫く磁束の変化によって生じる起電力を**誘導起電力**と呼び、このような現象を**電磁誘導**と呼ぶ。誘導起電力の負号には物理的な意味がある。$\partial\Phi/\partial t$ が正の場合、起電力V は負になり、電流は右ねじの向きとは逆に流れる。この電流によって作られる磁場は右ねじの法則より、外から加えられた磁場の向き（z 軸方向）とは逆になる。つまり、誘導起電力は、**回路を貫く磁束の変化を打ち消す向きに**生じる。このような誘導起電力の向きに関する法則は**レンツの法則**と呼ばれる。これまでは誘導起電力を長方形の回路を用いて導いたが、任意の形状の回路においても電磁誘導の式は成立する。

4.2 誘導電場

4.1 節では、空間的に変化している磁場内を移動している回路には、ローレンツ力を源とする誘導起電力が生じることを示した。この誘導起電力は、例え回路とともに動く座標系で見ても同様に生じていなければならない（相対性原理）。しかし回路が静止している座標系では、導体内の電荷は磁場からはローレンツ力を受けることができない。したがって、静止した回路を貫く磁束が変化したときには、それに伴って電場が生じ、これが誘導起電力の源となると考えざるを得ない。このような電場を誘導電場と呼び、この電場$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ によって単位電荷が回路を一周する際に受ける仕事は

$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

と表され、これが誘導起電力$V=-\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$ に等しくなくてはならないので、

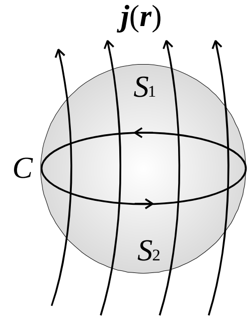
$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$$

が成立する。電場$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ には電荷が作る電場を含めても、その循環はゼロであるため、依然上式は成立する。この式がマックスウェル方程式の第２式（電磁誘導の法則）である。

（第４章レポート問題１）
１m あたりの巻き数がn である断面積S の無限に長いソレノイドコイルの単位長さ辺りの自己インダクタンスL を求めよ（L の定義：誘導起電力$V=LdI/dt$ ）。

4.3 変位電流

アンペールの法則



$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$

において、C は任意の閉曲線、S はC が張る任意の曲面を意味する。S として、右図のようにS_1 とS_2 を考えると、当然

$$\int_{S_1} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_2} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \left(= \frac{1}{\mu_0}\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \right)$$

が成り立つ。つまり、アンペールの法則が正しいなら面S_1 を通る電流と面S_2 を通る電流は等しくなくてはならない。これは言い換えると、S_1 とS_2 によって作られる平曲面S から外へ出る電流がゼロでなくてはならない：

$$\int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_1} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} - \int_{S_2} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \quad = 0$$

一方、電荷の保存則は

$$\int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV$$

と表されるので、$\int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$ は$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = 0$ を意味する。つまり、アンペールの法則が正しいならば、電荷分布が時間的に変化してはいけないことになってしまう。しかし、例えばコンデンサーなどでは、電荷分布は時間的に変化する。そこで、電荷分布が時間的に変化してもアンペールの法則が成り立つように、電流密度の定義に修正を加えることを試みよう。つまり、新たに電流密度$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{X}$ を定義し、これが

$$\int_{S_1} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

を満たせば、（$\boldsymbol{J}$ に関して）アンペールの法則が成立する。$\boldsymbol{X}$ として何をとればよいかというヒントは電荷の保存則とガウスの法則にある。体積V 内の電荷の時間微分は、ガウス

の法則より

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \frac{d}{dt}\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$$

と表現できる。これと電荷の保存則より

$$\int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_S \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

が成立する。つまり、$\boldsymbol{J}$ として

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

ととれば、アンペールの法則が成立することになる。ここで $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ は**変位電流**と呼ばれる。

最終的なアンペールの法則は

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

となる。これですべてのマックルウェル方程式の最終的な形（時間変化する電磁場においても正しい方程式）がすべて得られた。ここでマックルウェル方程式を再び列挙しよう。

$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho(\boldsymbol{r}) dV \quad \text{（ガウスの法則）}$$

$$\int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \quad \text{（電磁誘導の法則）}$$

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t} \right)\cdot d\boldsymbol{S} \quad \text{（アンペールの法則）}$$

$$\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \quad \text{（磁場のガウスの法則）}$$