

第 3 章 静磁場

3.1 ローレンツ力

電荷に働く力として、これまでクーロン力を考えてきた。それは以下の形をしている：

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

自然界には、(狭い意味での)ローレンツ力と呼ばれる、電荷が運動しているときにのみ働く力が存在する。それは以下の形をとる：

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

この式に登場する $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は磁場 (正確には磁束密度) と呼ばれ、単位を T(テスラ)とする。

一般に、電荷に働く力は、クーロン力とローレンツ力を足し合わせて

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}))$$

と表せる。これを (広い意味での) ローレンツ力と呼ぶ。

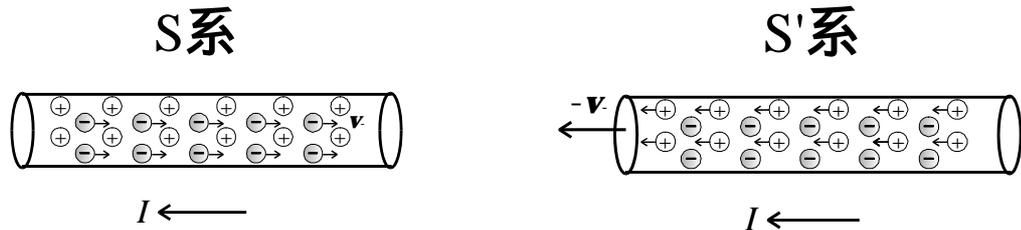
3.2 電流が作る磁場

電気伝導度 σ が一定の導線に定常電流が流れているとする。導線は電氣的に中性であるから、導線内の自由電子の電荷密度を ρ_- 、正イオン (原子核 + 閉殻電子) の電荷密度を ρ_+ とすると、

$$\rho_+ + \rho_- = 0$$

である。

今、導線は無間に長いとし、導線とともに静止している座標系を S 、導体内の自由電子の平均速度 \mathbf{v} と同じ速度で移動している座標系を S' とする。 S' 系から導線を見ると、自由電子は (平均して) 静止し、正イオンは速度 $-\mathbf{v}$ で移動している。このとき、 S' 系で見た導線内の正イオン間の間隔は、 S 系 (正イオンが静止している系) での間隔に比べ、ローレンツ収縮により (速度 \mathbf{v} の方向に) $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 倍に縮んでみえる。よっての S' 系での正イオンの電荷密度 ρ'_+ は、 S 系での正イオンの電荷密度 ρ_+ を用いて



$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (> \rho_+)$$

と表せる。同様に、 S 系における自由電子の電荷密度 ρ_- は、 S' 系における自由電子の電荷密度 ρ'_- と以下の関係がある（' の位置に注意）：

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Leftrightarrow \rho'_- = \rho_- \sqrt{1-v^2/c^2} (< \rho_-)$$

従って、 S' 系における導体の電荷密度 ρ' は、

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \frac{\rho_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \rho_- \sqrt{1-v^2/c^2}$$

となる。 $v \ll c$ ならば、 $\sqrt{1-v^2/c^2} \cong 1 - v^2/2c^2$ 、 $1/\sqrt{1-v^2/c^2} \cong 1 + v^2/2c^2$ と近似でき、さらに $\rho_- = -\rho_+$ であるから、

$$\rho' \cong \rho_+ \frac{v^2}{c^2}$$

となる。つまり S' 系から見ると導線は正に帯電している。

S' 系で正に帯電した導線が、 S' 系で静止している（クーロン力のみを感じる）点電荷 q に及ぼす力 \mathbf{F}' は、帯電した導線が作る電場 \mathbf{E}' を計算することにより

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}' = q \frac{\rho'_+ A}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\rho_+ v A}{r} v \mathbf{e}_r = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I}{r} v \mathbf{e}_r$$

と計算される。ここで A は導線の断面積、 r は導線から点電荷までの距離、 \mathbf{e}_r は導線と垂直で点電荷へ向かう単位ベクトルであり、電流の定義式 $I = \rho_+ v A$ を用いた。

一方、 S' 系で静止している点電荷 q は、 S 系では速度 \mathbf{v} で運動しているので、（狭義の）ローレンツ力が働く：

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -qve_I \times \mathbf{B}$$

ここで、 \mathbf{e}_I は電流の向きの単位ベクトル (自由電子の向きと逆!)、 \mathbf{B} は電流の作る磁場 (これから求める) である。点電荷に働く力は S 系と S' 系で等しいはずだから (実際は近似的に等しい。詳しくはファインマン物理学 「電磁気学」p.166(電磁場の相対性)参照)、

$$-qve_I \times \mathbf{B} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I}{r} v \mathbf{e}_r$$

$\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{B} = 0$ (磁場は電流に垂直) と仮定し、両辺に左から \mathbf{e}_I をかける (外積をとる) と、公式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ より、

$$\mathbf{B}(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I}{r} \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_r$$

となる。このように、無限に長い電流のつくる磁場は、導線からの距離に反比例し、電流値に比例し、右ねじの向きである。ここで後の便宜のため、

$$\mu_0 \equiv \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \quad \left(\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2 \right)$$

と定義しておく、

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_r$$

と書ける。 μ_0 は真空の透磁率と呼ばれる。その具体的な値は、 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} \times c^2$ より

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

である。

3.3 電流間に働く力

磁場 \mathbf{B} が存在するとき、電流 I が流れている導線に働く力を考える。導線の断面積を A 、自由電子の電荷密度を ρ_- とすると、自由電子の平均速度 \mathbf{v}_- は

$$\mathbf{v}_- = \frac{\mathbf{j}}{\rho_-} = \frac{I}{\rho_- A} \mathbf{e}_I$$

と表せる。ここで、 \mathbf{e}_I は電流の向きの単位ベクトルである。微小長さ dl 内に存在する自由電子の電荷量 dQ は

$$dQ = \rho_- A dl$$

この dl 内に存在する自由電子に働くローレンツ力 $d\mathbf{F}$ は、

$$d\mathbf{F} = dQ \mathbf{v}_- \times \mathbf{B} = \rho_- A dl \frac{I}{\rho_- A} \mathbf{e}_I \times \mathbf{B} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} dl$$

となる。ここで電流ベクトル $\mathbf{I} = I \mathbf{e}_I$ を定義した。このように、電流 I が流れている導線には単位長さあたり $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$ の力が働く。ここで、距離 r だけ離れた二本の平行な直線電流 \mathbf{I}_1 、 \mathbf{I}_2 間に働く力を考える。一本の無限に長い直線電流 \mathbf{I}_1 が、距離 r の位置に作る磁場は、

$$\mathbf{B}_1(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r} \mathbf{e}_{I_1} \times \mathbf{e}_r$$

であるので、直線電流 \mathbf{I}_2 の微小長さ dl に働く力は

$$d\mathbf{F} = \mathbf{I}_2 \times \mathbf{B}_1 dl = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} \mathbf{e}_{I_2} \times (\mathbf{e}_{I_1} \times \mathbf{e}_r) dl = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} (\mathbf{e}_{I_2} \cdot \mathbf{e}_{I_1}) \mathbf{e}_r dl$$

となる。この力は電流の向きが同じなら引力、反対なら斥力である。この式は、電流の定義に使われている。

3.4 ビオ - サバルの法則

電荷にはクーロンの法則

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dV'$$

が存在し、任意の電荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ に対して、それが作る磁場を計算できる。磁場に関しても、クーロンの法則に対応する法則は存在するだろうか。

前節より、無限に長い直線電流 \mathbf{I}_1 が、距離 r の位置に作る磁場は、

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_r$$

と表せることがわかった。一方、線電荷密度 λ で一様に帯電した無限に長い導線の作る電場は、ガウスの法則より、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \mathbf{e}_r$$

これら 2 式を見比べると、以下のような対応関係があるのがわかる：

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \leftrightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$$\mu_0 \leftrightarrow 1/\epsilon_0$$

$$I \leftrightarrow \lambda$$

$$\mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_r \leftrightarrow \mathbf{e}_r$$

そこで、磁場に関するクーロンの法則も、これらの対応関係に従うと推論する。電荷に関するクーロンの法則を線電荷密度 λ で一様に帯電した無限に長い導線に適用すると、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dl$$

であるので、これに対応する磁場に関するクーロンの法則は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dl$$

と書き表せる。この推論は実際に正しく、これを**ビオ - サバルの法則**と呼ぶ。電流素片ベクトル $d\mathbf{I} \equiv I\mathbf{e}_I dl$ を定義すれば、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{I} \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$$

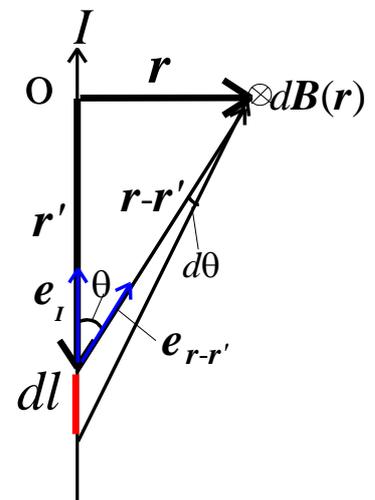
と簡単に表記できる。では、このビオ - サバルの法則から逆に、一本の無限に長い電流のつくる磁場を求めてみよう。

まず、位置 \mathbf{r}' にある電流素片 $I dl$ の作る磁場は

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dl$$

と表せる。ここで右図のように座標の原点をとると、

$$\mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} = \mathbf{e}_\phi \sin \theta$$



と表せるので

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I \sin \theta dl}{4\pi R^2} \mathbf{e}_\varphi$$

となる。ここで $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R$ とし、 \mathbf{e}_φ は紙面に垂直で、電流ベクトルに対して右ねじの向きと定義する。

$$\sin \theta dl = R d\theta, \quad \sin \theta = r / R$$

であるので、これらを用いて

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I \sin \theta d\theta}{4\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

と θ の関数で表現できる。これを 0 ($l = +\infty$) から π ($l = -\infty$) まで積分すると、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r} \mathbf{e}_\varphi d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

これは前節で求めていた結果と一致する。

(第 3 章レポート問題 1)

半径 a の円形回路に、電流 I が流れている。円の中心における磁場の大きさをビオ - サバールの法則を用いて計算せよ。余裕のあるものは、この円形回路の中心軸上の任意の点における磁場の大きさを求めよ。

3.5 アンペールの法則

定常電流におけるビオ - サバールの法則は、静電場におけるクーロンの法則に対応する。

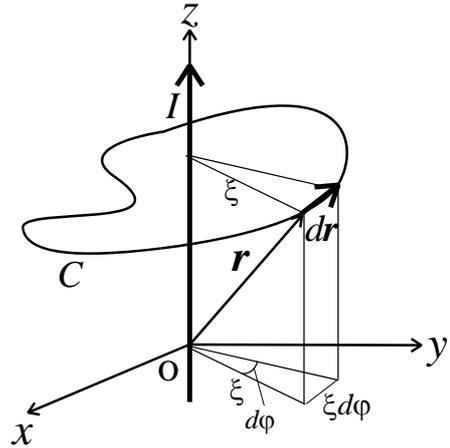
クーロンの法則よりガウスの法則

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & (\text{電荷 } q \text{ が閉曲面 } S \text{ の外部にある場合}) \\ q & (\text{電荷 } q \text{ が閉曲面 } S \text{ の内部にある場合}) \end{cases}$$

が導かれように、ビオ - サバールの法則より以下に示すアンペールの法則が導ける：

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \begin{cases} 0 & (\text{閉曲線 } C \text{ が電流 } I \text{ を絡まない場合}) \\ \mu_0 I & (\text{閉曲線 } C \text{ が電流 } I \text{ を絡む場合}) \end{cases}$$

ここで、電流 I は、経路 C に対して右ねじの方向（経路 C の向きにねじを回したときにねじの進む方向）を向いていれば正、その逆であれば負と定義する。上式の導出方法は、電磁気学の教科書（例えば加藤正昭著「電磁気学」（東京大学出版会）§ 3.4）に譲り、ここではアンペールの法則が実際に成り立っているかどうかを、無限に長い直線電流を例にとって確認する。右図のように円筒座標系を考え、 z 軸に沿って電流 I が流れているとすると、この周りにできる磁場は



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \xi} \mathbf{e}_\phi$$

である。ここで ξ は磁場を考える位置 \mathbf{r} と電流 (z 軸) までの距離、 \mathbf{e}_ϕ は電流に対して右ねじの向きの単位ベクトルである。このとき、

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I \oint_C \frac{1}{2\pi \xi} \mathbf{e}_\phi \cdot d\mathbf{r}$$

となるが、 $\mathbf{e}_\phi \cdot d\mathbf{r} = \xi d\phi$ と表せるので、上式は

$$\mu_0 I \oint_C \frac{1}{2\pi \xi} \xi d\phi = \mu_0 I \oint_C \frac{d\phi}{2\pi}$$

と変数 ϕ (偏角) の積分に帰着する。この積分は経路が電流を絡むときは $\mu_0 I$ 、絡まないときはゼロになる。よってアンペールの法則が正しいことが示された。

一般に、複数の電流回路が存在する場合、アンペールの法則は

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \sum_{\text{経路 } C \text{ が絡む}} I_i$$

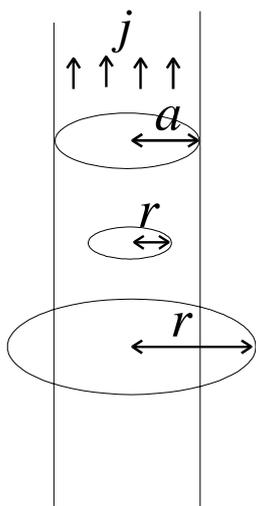
と拡張できる。更に、電流が電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ で空間的に分布している場合は、

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

となる。右辺の積分は、経路 C を縁とする任意の面 S に関して行い、これは経路 C を貫く電流 (に μ_0 をかけたもの) に他ならない。

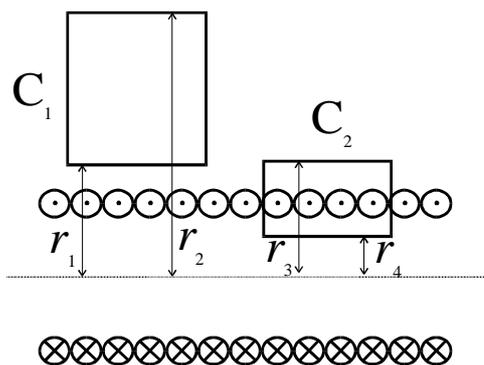
< アンペールの法則の応用例 >

半径 a の無限に長い円柱状導体内を一様な電流密度 j で流れる電流が作る磁場



< アンペールの法則の応用例 >

1 m あたりの巻き数が n である半径 a の無限に長いソレノイドコイルに、電流 I を流したときにできる磁場



(第 3 章レポート問題 2)

ソレノイドコイルの中心の磁場の大きさを、ビオ - サバルの法則を用いて計算せよ (第 3 章レポート問題 2 参照)。アンペールの法則を用いて得られた結果と一致したか?

3.5 電磁気学の基本法則

静電場のクーロンの法則 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dV'$ より、電場のガウスの法則

$$\epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

および、電場の循環ゼロの法則

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

が導けた。逆に、電場ガウスの法則と循環ゼロの法則（および無限遠で電場ゼロの条件）より静電場のクーロンの法則が導ける。つまり、電場ガウスの法則と循環ゼロの法則を合わせて静電場の基本法則とすることができる。

静磁場の場合、静電場のクーロンの法則に対応するビオ - サバールの法則

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dl$$

$$\left(\text{電流が連続的に分布している場合は } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dV' \right)$$

より、アンペールの法則

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

が導ける。これは、ビオ - サバールの法則と同値ではなく、更に磁場には湧き出しがないという条件（磁場に関するガウスの法則）

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

を加えるとビオ - サバールの法則と同値になる。上式は、電流素変が作る磁場が軸対称であることから容易に証明できる。

これまで勉強した静電場、静磁場の法則をまとめると、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \quad (\text{ローレンツ力})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dV' \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV & (\text{電場のガウスの法則}) \\ \oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 & (\text{循環ゼロの法則}) \end{cases}$$

(クーロンの法則)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dV' \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} & (\text{アンペールの法則}) \\ \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0 & (\text{磁場のガウスの法則}) \end{cases}$$

(ビオ - サバールの法則)

これらの式は、**時間変化しない電場、磁場**に関しては**すべて真実である**。ただし、電場、磁場が時間変化する場合、ローレンツ力の式は依然正しいが、静電場のクーロンの法則、およびビオ - サバールの法則は厳密には正しくなくなり、以下に示す 4 つの方程式のみが真実となる：

$$\epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad (\text{ガウスの法則})$$

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{電磁誘導の法則})$$

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{アンペールの法則})$$

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{磁場のガウスの法則})$$

これらをまとめて**マクスウェル方程式**と呼ぶ。静電場、静磁場の場合との違いをアンダーラインで示してある。マクスウェル方程式にローレンツ力を加えた体系が、(真空の)電磁気学の基本法則である。次章でマクスウェル方程式の第 2 式および第 3 式を導く。