第２章　定常電流

2.1 電流密度

導体中の正電荷（陽子）の密度を $\rho_+(\boldsymbol{r})(>0)$、負電荷（電子）の密度を $\rho_-(\boldsymbol{r})(<0)$ とする。正味の電荷密度は $\rho(\boldsymbol{r})=\rho_+(\boldsymbol{r})+\rho_-(\boldsymbol{r})$ である。正電荷、負電荷がそれぞれ速度 $\boldsymbol{v}_+(\boldsymbol{r})$、$\boldsymbol{v}_-(\boldsymbol{r})$ で移動しているとき、以下のように**電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$** を定義する：

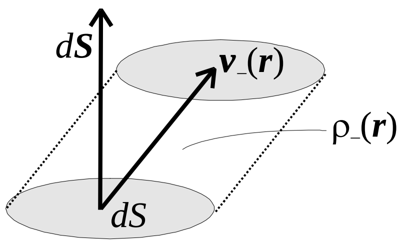
$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\rho_+(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}_+(\boldsymbol{r})+\rho_-(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}_-(\boldsymbol{r})$$

実際の導体では、陽子（原子核）は移動せず、電子のみ移動できるので、実質的に、

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\rho_-(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}_-(\boldsymbol{r})$$

である。$\rho_-(\boldsymbol{r})<0$ であるので、電流密度の向きは電子の移動する向きと反対になる。これを仮想的な正電荷が、電子の移動する向きと反対に流れている、と考えても（この授業でカバーする電磁気学の範囲では）差し支えない。

導体内のある面素 dS を単位時間に通過する電荷量は、



$$\rho_-(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}_-(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$

で与えられるの。導線（細長い導体）を流れる**電流**とは、導線のある断面 S を単位時間に通過する電荷量で定義される：

$$I=\int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$

特に、導線内で電流密度が一定（$|\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})|=j$）で、断面 S が電流密度に垂直な場合、

$$I=j\int_S dS=jS$$

となる。

（第２章レポート問題１）
断面積が 1㎟ の銅線に１Ａの電流（一秒間に１Ｃの電荷）が流れている。銅線内の電流密度は一様と仮定して、銅線内の自由電子の移動する速さを求めよ。ただし、銅の密度は 8.93g/㎤、原子量は 63.5、アボガドロ数は 6.02×10^{23}、電気素量（電子の電荷）は 1.60×10^{-19} とし、銅原子１個あたり１個の自由電子を持つとする。

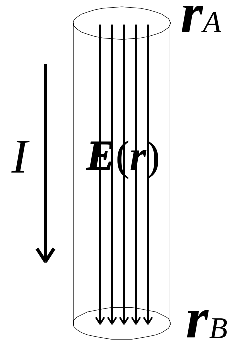
2.2 オームの法則

導体内に電場が存在すると、自由電子は電場から力を受けて移動する。定常状態では、導体内の電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ が、その位置における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ に比例することが経験的に知られている：

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \sigma \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

これを**オームの法則**といい、比例定数 σ は**電気伝導度**、または**電気伝導率**と呼ばれる。

断面積 S 、電気伝導度 σ の導線に電流 I が流れているとき、電流の方向の電場が存在するの。位置 A からみた（位置 A を基準とした）位置 B の電位 V は、



$$V = -\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{1}{\sigma}\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

である。導線内の電流密度は一定（$|\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})| = j = I/S$ ）と仮定し、位置 A から位置 B の向きに電流が流れているとすると、$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = jdl$ と書けるので

$$V = -\frac{j}{\sigma}\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} dl = -\frac{j}{\sigma} l = -\frac{l}{\sigma S} I$$

と表せる。ここで l は位置 A、B 間の距離である。ここで、位置 A、B 間の**抵抗** R を

$$\frac{l}{\sigma S} \equiv R$$

と定義すると、

$$V = -RI$$

と書ける。この式も**オームの法則**と呼ばれる。上式は電流の上流を基準としたときのもので、V の値は常に負となる。そこで V は**電圧降下**と呼ばれることもある。電流の下流を基準とすれば $V = RI$ となり、V は常に正となる。

抵抗の単位は V/A であり、これを Ω「オーム」と定義する。$R = l/\sigma S = l\rho/S$（$\rho \equiv 1/\sigma$：抵抗率）より、導体の抵抗は、長さに比例し、断面積に反比例する。

2.3 ジュール熱

導体中に電流が流れているとき、電荷が電場から力を受けながら移動しているので、電場は電荷に仕事をしているはずである。今、抵抗 R の抵抗体に電流 I が流れているとすると、電流の下流から見た、この抵抗体の上流の電位は $V = RI$ であり、単位時間あたり I の電荷が、抵抗体の上流から下流に移動するので、電荷が受ける単位時間あたりの仕事 P は

$$P = VI = RI^2$$

となる。P は**仕事率**（英語では「パワー」）または**電力**と呼ばれ、単位は V×A = J/C × C/s = J/s で、これを W「ワット」を定義する。電荷になされた仕事は、電荷（導体では自由電子）と抵抗体中の原子や不純物との衝突を通して、抵抗体の熱エネルギー（**ジュール熱**）に変換される。更に、その熱エネルギーを効率良く光のエネルギーに変換するものが電灯である。

2.4 電荷の保存則

電磁気学の基本法則の一つに、電荷の保存則がある。これを電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ を用いて表現してみよう。ある閉曲面 S 内にある電荷の総和の単位時間あたりの変化量は、電荷密度を $\rho(\boldsymbol{r},t)$ とすると、

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho(\boldsymbol{r},t)dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV$$

と表せる。一方、この閉曲面 S から単位時間あたり流出する電荷の総量は電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ を用いて

$$\int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$

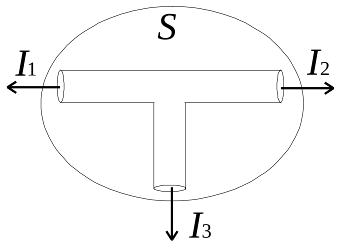
と表せる。電荷の総和が減少していれば、流出する電荷量は正であることに注意して、

$$\int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV$$

これが、電荷の保存則を表す式である。

2.5 キルヒホフの第1法則

ある電気回路に定常的な電流が流れているとき（これを**直流回路**という）、回路内の電荷分布は（あるとしても）時間変化しないので、任意の閉曲面S について、電荷の保存則の式より、



$$\int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

が成立する。ここで、閉曲面S を回路の分岐点を囲むようにとると、

$$\int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \sum_i I_i = 0$$

が成立する。つまり分岐点から流れ出る電流の総和はゼロになる。これを**キルヒホフの第1法則**という。

2.6 起電力とキルヒホフの第2法則

電源とは、何らかの方法によって（化学反応、光による電子の励起、電磁誘導など）電極間に一定の電位差を保つ装置のことである。電源によって作られる電極間の電位差は、**起電力**または**電圧**ともよばれ、単位は電位と同じ V（ボルト）である。起電力がV の電源は、実効的に電位差V を持つ（容量無限大の）コンデンサーと同値である。

直流回路上のある閉曲線 C 上を単位電荷が移動するのに必要な仕事（電位）$-\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ を考える。積分する向きを電流の正の向きと定義して決めておくと、抵抗をまたいだ積分は常に$-\int_{\text{抵抗}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -RI$ とかける。また電源をマイナス極からプラス極の方向に積分すれば$-\int_{\text{電源}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = V > 0$、逆の場合は$-\int_{\text{電源}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = V < 0$となる。このように起電力の符号も考慮した起電力の和$\sum_i V_i$ と、電圧降下の和$\sum_j -R_j I_j$ の和が$-\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ に他ならない。ところで、定常電流においては、$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0$であるので、

$$\sum_i V_i = \sum_j R_j I_j$$

が成立する。これを**キルヒホフの第2法則**という。この法則の適用には、起電力の正負と電流の向きに注意しなければならない。