1.13 静電エネルギー

ある電荷分布を作り上げるのに必要なエネルギーを、その電荷分布の**静電エネルギー**と呼ぶ。例えば、電荷q_1、q_2が位置$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$に存在している電荷分布の静電エネルギーは、電荷q_1を位置$\boldsymbol{r}_1$に置き（これにはエネルギーはいらない)、電荷q_2を無限遠から位置$\boldsymbol{r}_2$まで移動させるのに必要なエネルギーである。それは電荷q_1が位置$\boldsymbol{r}_2$に作る電位$\phi_1(\boldsymbol{r}_2)$に、電荷q_2をかけたものに他ならない（電位の定義）：

$$U = q_2\phi_1(\boldsymbol{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

一般に電荷q_1、q_2、…が位置$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、…に存在する場合、全静電エネルギーは、電荷を一つずつ配置するのに必要なエネルギーの総和であるから

$$\begin{aligned} U &= q_2\phi_1(\boldsymbol{r}_2) + q_3\big(\phi_1(\boldsymbol{r}_3)+\phi_2(\boldsymbol{r}_3)\big) + q_4\big(\phi_1(\boldsymbol{r}_4)+\phi_2(\boldsymbol{r}_4)+\phi_3(\boldsymbol{r}_4)\big) + \cdots \\ &= \sum_{i<j} q_j\phi_i(\boldsymbol{r}_j) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \end{aligned}$$

と表せる。ここで$q_j\phi_i(\boldsymbol{r}_j) = q_i\phi_j(\boldsymbol{r}_i) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_i q_j}{r_{ij}}$が成立するので、これを用いて

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} q_j\phi_i(\boldsymbol{r}_j) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

と書き換えることもできる。さらに、全電荷が（電荷q_jの）位置$\boldsymbol{r}_j$に作る電位が

$$\phi(\boldsymbol{r}_j) = \sum_{i\neq j}\phi_i(\boldsymbol{r}_j)$$

とかける（電荷q_jが作る電位が自動的に除かれている）ことを利用して、

$$U = \frac{1}{2}\sum_j q_j\phi(\boldsymbol{r}_j)$$

と表すこともできる。この式を電荷が連続的に分布している場合に拡張すると、

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\,dV$$

となる。例として、面積S の平行平板コンデンサーの静電エネルギーを考える。今、コンデンサーの電位差がV で、電荷$Q=CV$ が蓄えられているとすると、平板上の面電荷密度は$\sigma=Q/S$ である。一方の平板は電位の基準点（アース）なので電位ゼロ、もう片方の電位はV であるので、

$$U=\frac{1}{2}\int\rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})dV=\frac{1}{2}\int\sigma(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})dS=\frac{1}{2}\sigma VS=\frac{1}{2}QV \quad \left(=\frac{1}{2}CV^2\right)$$

と計算される。これを別の方法で確認しよう。このコンデンサーに電荷Q'を蓄えたときの電位は$V'=Q'/C$ 、このとき微小電荷dQ をコンデンサーの電極間で移動させるのに必要な仕事は$dU=V'dQ'$、これを$Q'=0$ から$Q'=Q$ まで積分すると、

$$U=\int_0^Q V'dQ'=\int_0^Q\frac{Q'}{C}dQ'=\frac{1}{C}\frac{1}{2}\left[Q'^2\right]_0^Q=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}QV$$

このように同様の結果を得る。

　コンデンサーの電気容量は$C=\varepsilon_0 S/d$ 、コンデンサーの電圧は$V=Ed$ とかけることから、コンデンサーのエネルギーは、

$$U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{S}{d}(Ed)^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\cdot Sd$$

と形式的に表現できる。Sd は電場の存在する体積なので、上式は静電エネルギーが密度

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

で空間に蓄えられていると解釈することができる。この考え方は、電荷が連続的に分布する場合には常に正しいが、点電荷の作る電場には適用できない（無限大になってしまう）。

（第１章レポート問題５）

半径a の導体球の表面に一様に電荷Q が帯電している。この導体の静電エネルギーを

①$U=\frac{1}{2}\int\rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})dV$，②$U=\int u dV=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int E^2 dV$ の２通りで計算し，一致することを確認せよ。

（例）原子核の静電エネルギー

電荷Qが一様に帯電している半径aの球を考える。中心からの距離rの位置における電場の大きさは、ガウスの法則より、

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{a^3}r & (0 \le r \le a) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & (r > a) \end{cases}$$

また、中心からの距離rの位置における電位は、無限遠を基準とすると、

$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(3 - \dfrac{r^2}{a^2}\right) & (0 \le r \le a) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} & (r > a) \end{cases}$$

となる。この電荷分布の持つ静電エネルギーを電位と電荷密度より求めると、

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})dV = \frac{1}{2}\int_0^a \rho\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right)\cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5a}$$

となり、また電場の大きさより求めると、

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int E^2(r)dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left[\int_0^a\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^3}r\right)^2\cdot 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)^2\cdot 4\pi r^2 dr\right]$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a^6}\int_0^a r^4 dr + \int_a^\infty \frac{1}{r^2}dr\right) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5a}$$

となり、両者は当然一致する。

質量数（陽子と中性子の総数）がA、原子番号がZの原子核の半径aは、

$$a = r_0 A^{1/3},\quad r_0 = 1.2\times 10^{-15}\ \mathrm{m}$$

と近似的に表されることが衝突実験よりわかっている。aがAの 1/3 乗に比例するということは、原子核内の陽子および中性子の密度は原子種によらず、ほぼ一定であることを意味する。原子核の全電荷Zeが、この半径aの球内に一様に分布しているとみすと、原子核が持つ静電エネルギーは、

$$U = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z^2}{r_0 A^{1/3}}$$

と表される。具体的に数値を代入すると、

$$U = 1.15\frac{Z^2}{A^{1/3}}\times 10^{-13}\ \mathrm{J} = 0.72\frac{Z^2}{A^{1/3}}\ \mathrm{MeV}$$

（1 eV　　1.6×10^{-19} J, 1 MeV = 10^6 eV）

安定に存在する原子核では、質量数 A は原子番号 Z にほぼ比例しているので、$U \propto A^{5/3}$ となる。よって、１核子当たりの静電エネルギーは、

$$U/A \propto A^{2/3}$$

となり、質量数の 2/3 乗に比例する。

核子同士はクーロン力によって互いに反発しているが、**核力**と呼ばれる強い引力によって互いに結合している。核力の到達距離は非常に短いので、引力は主に隣り合う核子間にのみ働く。１核子あたりの結合エネルギー（核子をばらばらにするのに必要なエネルギー）は、最初は質量数が大きくなるに従って増大するが、質量数が大きくなると質量数にあまり依存しなくなる。一方、１核子あたりの静電エネルギーは $A^{1/3}$ に比例して大きくなる（原子核が不安定になる）ので、結果的に１核子あたりの結合エネルギーは、下図のようになる。核分裂のエネルギー（例：^{235}U + n → ^{91}Sr + ^{143}Xe + 2n + 200 MeV）は、主に静電エネルギー、核融合（例：$4{}^1$H → ^{4}He + 2e + 25 MeV）のエネルギーは、主に核力のエネルギーである。