

科目：物理学 A ( 電磁気学 ) ( 721 教室 )

担当：鳥井 寿夫 ( とりい よしお )

居室：1 6 号館 224 A

tel: 03-5454-6757 (内線 46757)

e-mail: ytorii@phys.c.u-tokyo.ac.jp

<http://maildbs.c.u-tokyo.ac.jp/~torii/>

授業日：毎週水曜 2 限 ( 10:40 ~ 12:10 ) 10/5 ~ 12/21 , 1/11 ~ 1/18 ( 計 13 回 )

評価：毎回の授業で出されるレポート ( 50% ) + 期末試験 ( 50% )

レポートの提出期限：次回の授業の開始前。教卓にて回収。

( 注意 ) レポートは 決して他人のものを写してはならない。教科書は見てもよいが、自分の言葉で解答を表現すること ( 教科書の丸写しはカンニングとみなす )。提出したかどうかのみチェックするので、必ず自力でできるところまでやること。

教科書：特に指定しない。毎回配るレジユメがテキストになる。以下に参考書を挙げる

**加藤正昭著・電磁気学** ( 東京大学出版会 )

教養で習う電磁気学を要領よくまとめてあるスタンダードな教科書。具体例や補足説明も多い。

**兵頭俊夫著・電磁気学** ( 裳華房 )

電磁気学で使う数学を基礎から丁寧に説明してある。わかり易さを重視し、積分形に徹して電磁気学を論じている。

**ファインマン物理学 III 「電磁気学」** ( 岩波書店 )

ファインマン ( 1965 年ノーベル物理学賞 ) が実際にカリフォルニア工科大学で行った講義をまとめたもの。「電磁気学」という枠にとらわれず、物理学全体または他の学問分野を常に視野に入れた著者独特の説明は、他の教科書では見られない。不朽の教科書。

## 第 0 章 単位系

### 0.1 物理量の次元と単位

**物理量** (physical quantity) とは、測定によって客観的に定量化できる量である。**次元** (dimension) とは、物理量の質的違いを表すもので、物理量からその大きさを除いた概念である。**単位** (unit) とは、各物理量の基準となる大きさのことである。

< 国際単位系 (SI: Système International d'Unités) >

4 種の基本的な物理量である、**長さ**、**質量**、**時間**、**電流** に対して、それぞれ **メートル (m)**、**キログラム (kg)**、**秒 (s)**、**アンペア (A)** を単位とし (**MKSA 単位系**)、これに温度の単位 **ケルビン (K)**、物質量を表す単位 **モル (mol)**、光度の単位 **カンデラ (cd)**、角度の基本量 **ラジアン (rad)**、および立体角 **ステラジアン (sr)** を加えた 9 個を基本単位 (最低限必要な単位) とする単位系。その他の単位は、それらより物理法則、定義に基づく乗除のみで導かれる (組み立て単位)。

< 基本単位の定義 >

**時間** : 1 s は、 $^{133}\text{Cs}$  の基底状態の二つの超微細構造準位 ( $F=4, M=0$  および  $F=3, M=0$ ) の間のマイクロ波遷移に対応する放射の 9,192,631,770 周期の継続時間

**長さ** : 1 m は、光が  $1/299792458$  秒間に進む距離 (光速を  $299792458 \text{ m/s}$  と定義)

**質量** : 1 kg は、キログラム原器 (直径、高さとも 39 mm の円柱形で、白金 90%、イリジウム 10% の合金) の質量

**電流** : 1 A は、真空中に 1 m の間隔で平行に置かれた無限に小さい円形断面積を有する無限に長い 2 本の直線状導体のそれぞれを流れ、これらの導体に 1 m ごとに  $2 \times 10^{-7} \text{ N}$  の力を及ぼし合う一定の電流

(電荷 : 1 C (クーロン) は、1 A の電流が 1 s に運ぶ電荷の量)

(注) 実用的に電荷より電流の方が正確に測定できるので、電流を基本単位としている。

< 組み立て単位の例 >

速度 ( $\text{m/s}$ )、加速度 ( $\text{m/s}^2$ )、電荷 ( $\text{As} = \text{C}$ )

# 第 1 章 静電場

## 1.1 電荷の基本的性質

電荷に関する基本的な性質 (これまでの実験事実より正しいと信じられていること)

電荷には**プラス**と**マイナス**の 2 種類あり、同種同士は反発し、異種同士は引き合う。

(電子が持っている電荷をマイナス、原子核が持っている電荷をプラスと定義する。)

原子核や電子の電荷は、常に**電気素量** ( $e \cong 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ ) の整数倍である。陽子の電荷は常に  $e$ 、電子の電荷は常に  $-e$  である。(陽子や中性子を構成しているクォークは  $\pm e/3, \pm 2e/3$  の電荷を持つとされているが、単独では観測されない。)

いかなる物理的または化学的变化に際しても、全電荷の和は不変である (電荷の保存則)

(例)  $\cdot \text{H}^+ + \text{OH}^- \rightarrow \text{H}_2\text{O}$  (中和反応)

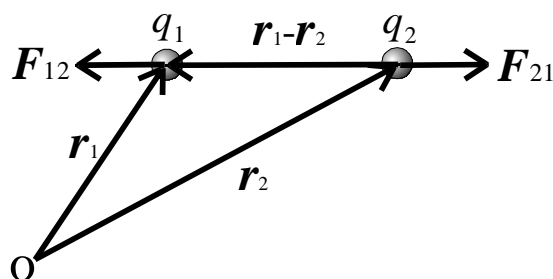
$\cdot n \rightarrow p + e^- + \nu$  ( $\beta$ 崩壊)

$\cdot e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$  (電子と陽電子の対消滅)

粒子	電荷
n: 中性子	0
p: 陽子	+e
$\nu$ : ニュートリノ	0
e <sup>-</sup> : 電子	-e
$\gamma$ : ガンマ線	0

## 1.2 二つの電荷の間に働く力の向き

電荷  $q_2$  が電荷  $q_1$  に及ぼす力を  $\mathbf{F}_{12}$  とすると、 $\mathbf{F}_{12}$  は電荷  $q_1, q_2$  を結ぶ直線上にある (状況の軸対称性より、この直線以外の方向を向く理由がない)。このような力を一般的に**中心力**とよぶ。このことを数学的に表現すると、



$$\mathbf{F}_{12} = \alpha(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (\alpha \text{ は比例定数})$$

となる。また作用反作用の法則 (経験則) より、電荷  $q_1$  が電荷  $q_2$  に及ぼす力  $\mathbf{F}_{21}$  は、 $\mathbf{F}_{12}$  と大きさは同じで向きが反対である。つまり

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$

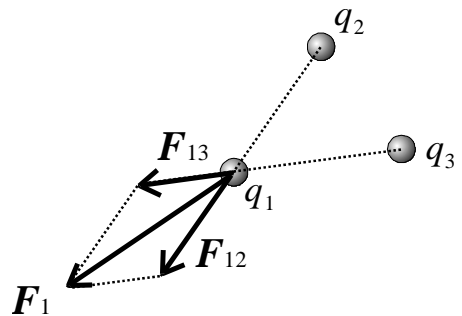
が成り立つ。

### 1.3 力の重ね合わせの原理

電荷  $q_2$  が電荷  $q_1$  に及ぼす力を  $\mathbf{F}_{12}$ 、電荷  $q_3$  が電荷  $q_1$  に及ぼす力を  $\mathbf{F}_{13}$  とすると、電荷  $q_1$  が受ける力  $\mathbf{F}_1$  は、

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13}$$

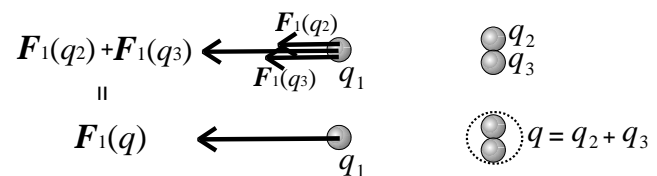
と表せる。これを**重ね合わせの原理**という。これは自明なことではなく、実験的に確認されている経験則である。



全ての種類の力が一般的に重ね合わせの原理に従うわけではない(例: 分子間力、核力)。この法則は電荷の数が 3 個以上のときでも成り立つ:

$$\mathbf{F}_1 = \sum_i \mathbf{F}_{1,i}$$

今、電荷  $q_2$ 、 $q_3$  が同じ場所にあるとすると、実質的に  $q = q_2 + q_3$  という電荷が  $q_1$  に力を及ぼしていることになる。そ



の力を  $\mathbf{F}_1(q)$  と表す。この力は、 $q_2$  だけが電荷  $q_1$  に及ぼす力を  $\mathbf{F}_1(q_2)$  と  $q_3$  だけが電荷  $q_1$  に及ぼす力を  $\mathbf{F}_1(q_3)$  の重ね合わせで表されるはずである:

$$\mathbf{F}_1(q) = \mathbf{F}_1(q_2 + q_3) = \mathbf{F}_1(q_2) + \mathbf{F}_1(q_3)$$

この関係が常に成立するためには、 $\mathbf{F}_1(q)$  の大きさは、力を及ぼす電荷  $q$  の大きさに比例していなければならない:

$$\mathbf{F}_1(q) \propto q$$

話を 2 つの電荷  $q_1$ 、 $q_2$  に戻すと、電荷  $q_2$  が電荷  $q_1$  に及ぼす力  $\mathbf{F}_{12}$  は電荷  $q_2$  に比例する。

$$\mathbf{F}_{12} \propto q_2$$

同様に、電荷  $q_1$  が電荷  $q_2$  に及ぼす力  $\mathbf{F}_{21}$  は電荷  $q_1$  に比例している。

$$\mathbf{F}_{21} \propto q_1$$

ところで、作用・反作用の法則より、 $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  であるので、

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \propto q_1 q_2$$

が成立する。このように 2 つの電荷の間に働く力は、お互いの電荷の積に比例する。

#### 1.4 クーロンの法則

2つの電荷の間に働く力が、2つの電荷を結ぶ直線に平行であり、その大きさが2つの電荷の積に比例することが、軸対称性、重ね合わせの原理、作用反作用の法則より、必然的に導かれた。また、2つの電荷の間に働く力の大きさは、電荷間の距離の自乗に反比例することが実験的に確認されている(1785年にクーロンがこれを最初に実験的に確認した)。これらの結果をまとめると、電荷 $q_2$ が電荷 $q_1$ に及ぼす力を $\mathbf{F}_{12}$ は、 $\mathbf{r}$ を電荷 $q_2$ から電荷 $q_1$ に向かうベクトルとすると

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

と表すことができる(ここで $r = |\mathbf{r}|$ 、 $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ ( $\mathbf{r}$ の単位ベクトル)と定義した)。これは**クーロンの法則**と呼ばれ、この法則に従う静電気力を**クーロン力**という。クーロンの法則に表れる比例定数 $k$ は、1Aの電流が1sに運ぶ電荷の量を1CとするSI単位系では

$$k = 10^{-7} c^2 \cong 8.988 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \quad (\text{ただし } c \cong 2.988 \times 10^8 \text{ ms は光速})$$

となることが後に理論的に示される。後の便宜のため、以降、比例定数 $k$ を

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

と表す。ここで $\epsilon_0$ は**真空の誘電率**と呼ばれる(その物理的意味は後に明らかになる)。

#### 1.5 電場

原点 $\mathbf{O}$ に電荷 $q$ が置かれているとする。このとき、別の電荷 $q'$ を位置 $\mathbf{r}$ に置いたとする(実際に置くわけではないので、電荷 $q'$ は**試験電荷**と呼ばれる)。電荷 $q$ が電荷 $q'$ に及ぼす力は、 $q'$ に比例し、位置 $\mathbf{r}$ に依存するので、一般的に

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q' \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

と表すことができる。 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は、位置 $\mathbf{r}$ に置かれた単位電荷が受ける力という意味を持ち、電荷 $q$ が位置 $\mathbf{r}$ につくる**電場**と呼ばれる(単位はN/C)。その具体形はクーロンの法則より

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r$$

と表せる。一般に、電荷  $q_1, q_2, \dots$  が位置  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$  に存在しているときに位置  $\mathbf{r}$  にできている電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は、クーロン力の重ね合わせの原理が成り立つことから、個々の電荷が作る電場  $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$  の和で与えられる：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}$$

電荷が連続的に分布しているとき、位置  $\mathbf{r}'$  の近傍の単位体積中に含まれる (平均的な) 電荷の量を電荷密度  $\rho(\mathbf{r}')$  で表し、この電荷分布が作る電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dV'$$

と表せる。

## 1.6 ガウスの法則

原点  $\mathbf{O}$  から一定の割合  $q$  ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) で縮まない流体が等方的に湧き出ているとする。このとき、位置  $\mathbf{r}$  における流体の速度場  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  は簡単な考察により、

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r$$

であることがわかる。この式は電荷が作る電場を表す式

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \Leftrightarrow \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r$$

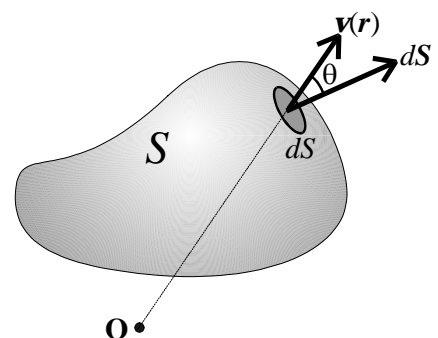
と (比例定数  $\epsilon_0$  を除いて) 数学的に等価である。つまり原点  $\mathbf{O}$  に  $q$  の湧き出しがある速度場  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  に対して成り立つ数学的な性質は、原点  $\mathbf{O}$  に電荷  $q$  があるときの電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  (に  $\epsilon_0$  をかけたもの) についても同様に成り立つ。

さて、速度場  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  のある空間上に、ある閉曲面  $S$  を考える。この閉曲面上の面素  $dS$  を通る流体の流量  $df$  は

$$df = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cos \theta dS = v_n(\mathbf{r}) dS$$



無重力空間での水玉



で与えられる。ここで  $\theta$  は  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  と面素  $dS$  の法線ベクトルとの角度、 $v_n(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r}) \cos \theta$  は  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  の面素  $dS$  の法線ベクトルへの射影成分を表す。流体が閉曲面  $S$  から流れ出るときの流量が正の値に計算されるよう、法線ベクトルは常に閉曲面  $S$  の外側を向く方を考える。面素  $dS$  の法線ベクトルと同じ向きで、大きさが  $dS$  であるベクトルを  $d\mathbf{S}$  と定義すれば (これは**面素ベクトル**と呼ばれる)  $dS$  を通る流量  $df$  は

$$df = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

と内積で表現することもできる (以降、この表現を用いる)。この閉曲面  $S$  全体を通る流量  $f$  は、閉曲面  $S$  上の面素  $dS$  を通る流量  $df$  の総和であるから、以下の面積分で計算される:

$$f = \int_S df = \int_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

この閉曲面  $S$  の中に湧き出しが存在しないならば、流体は伸びも縮みもしないのだから、この閉曲面から流れ出す流量はゼロであり、

$$\int_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

が成り立つ。また、この閉曲面  $S$  の中に湧き出し  $q$  が存在するならば、

$$\int_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = q$$

が成り立つ。速度場  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  と電場に真空の誘電率  $\epsilon_0$  をかけた  $\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})$  は数学的に等価であったから、以上のことから次のことが言える。電荷  $q$  が作る電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は

$$\epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & (\text{電荷 } q \text{ が閉曲面 } S \text{ の外部にある場合}) \\ q & (\text{電荷 } q \text{ が閉曲面 } S \text{ の内部にある場合}) \end{cases}$$

を満たす。これを**ガウスの法則**と呼ばれる。上の式において、 $\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$  は、流体の場合の流量に相当するもので、これを面素  $dS$  を貫く**電束** (electric flux) と呼ぶ。ガウスの法則は、「閉曲面を貫く電束は、その閉曲面内に存在する電荷に等しい」と表現することができる。ガウスの法則は電場の重ね合わせの原理より電荷が 2 個以上存在する場合に拡張できる。すなわち、空間に電荷  $q_1$ 、 $q_2 \dots$  が存在するとき、これらの電荷が作る電場は

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \sum_{S\text{内部}} q_i$$

を満たす。電荷が電荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  で連続的に分布している場合には、

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

とかける。この式がもっとも一般的なもので、この式をガウスの法則と呼ぶこともある。

ガウスの法則の応用例 半径  $a$  の球の表面上に電荷  $Q$  が一様に帯電している場合の電場

ガウスの法則の応用例 自由空間に電荷の安定点は存在するか？ (Earnshaw の定理)

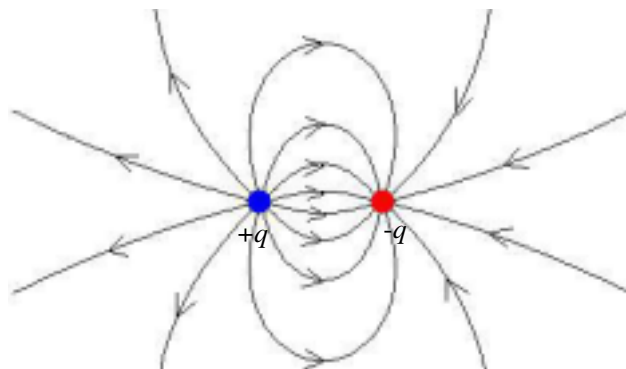
(第 1 章レポート問題 1)

- (1) 無限に広い平板上に、面密度  $\sigma$  で一様に電荷が分布している。このとき、この平面から距離  $r$  の位置における電場の大きさをガウスの法則より求めよ。
- (2) 半径  $a$  の球の内部に電荷  $Q$  が一様に帯電している。このとき、球の中心からの距離  $r$  の位置における電場の大きさ  $E(r)$  をガウスの法則より求め、その結果を横軸  $r$ 、縦軸  $E(r)$  とするグラフに描け。



### 1.7 電気力線

空間の各点の電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  の方向を結んで画いた曲線を**電気力線**という。電気力線は電場の様子を視覚的に表現する単なる手法であり、実体はない。電気力線は、その密度が各点での電場の大きさに比例するように描くことができる。電荷  $q$  から  $q/\epsilon_0$  本の電気力線が出ていと約束すると、ある微小面積  $dS$  を貫く電気力線の本数は  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$  となる。電気力線の密度（電気力線と垂直な面における、単位面積あたりの電気力線の本数）は、電場の大きさを表す。



正負の点電荷が作る電気力線

### 1.8 電位

原点 0 に置かれている電荷  $q$  が作る電場から、別の電荷  $q'$  が受ける力は

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q' \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \mathbf{e}_r$$

である。この力に抗して、電荷  $q'$  を位置  $\mathbf{r}_A$  から  $\mathbf{r}_B$  へ移動させるために必要な仕事  $W_{AB}$  は

$$W_{AB} \equiv -\int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r}$$

と表される。ここで  $\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r}$  の意味を考えると、これは微小変移ベクトル  $d\mathbf{r}$  の動径方向への射影成分、つまり原点からの距離の変化  $dr$ （スカラー）を表す。よって上の積分は

$$W_{AB} = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

となり、これは経路に依らない(始点と終点のみで決まる)。このような力の場を**保存場**と呼ぶ(一般に中心力場は保存場である)。電荷が複数ある場合にも、重ね合わせの原理よりこの性質は維持される。

単位電荷に働くクーロン力、つまり電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  も当然保存場であるから、任意に選んだ 2 つの経路  $C, C'$  について

$$\int_{A(C)B} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{A(C')B} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

が成立する。ここで経路  $C'$  の始点と終点を入れ換えた経路を  $\overline{C'}$  とすると、

$$\int_{A(C')B} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{B(\overline{C'})A} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

が成立するので、

$$\begin{aligned} \int_{A(C)B} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{B(\overline{C'})A} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ \Leftrightarrow \int_{A(C)B} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{B(\overline{C'})A} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= 0 \\ \Leftrightarrow \oint_{A(C)B(\overline{C'})A} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= 0 \end{aligned}$$

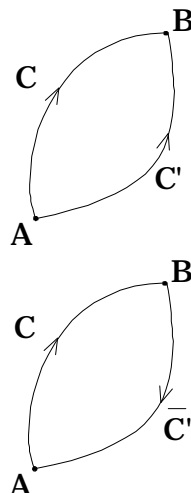
と書ける。経路  $C, \overline{C'}$ 、位置  $A, B$  は任意に選べるので、任意の閉じた経路  $C$  について

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

が成立する。これは電場が保存場であることの別の表現であり、ガウスの法則と並んで静電場の基本法則の一つである。

クーロン力の場合は保存場なので、ある基準点  $\mathbf{r}_0$  から別の位置  $\mathbf{r}$  に電荷  $q$  を動かすために必要な仕事は、位置  $\mathbf{r}$  の関数として一意に決まる。これを、電荷  $q$  が位置  $\mathbf{r}$  で持つ**位置エネルギー**と呼ぶ。特に、単位電荷の持つ位置エネルギーを**電位**もしくは**静電ポテンシャル**と呼ぶ。単位は J/C であるが、これを V(ボルト)とも表す。位置  $\mathbf{r}_0$  を基準点とする位置  $\mathbf{r}$  の電位  $\phi(\mathbf{r})$  は以下で定義される：

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$



原点 0 にある電荷  $q$  がつくる電位は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

特に基準点を無限遠 ( $r_0 = \infty$ ) にとると、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

となる。今後、特に断らない限り、電位の基準点は無限遠にとる。一般に電荷分布  $\rho(\mathbf{r})$  のつくる電位は、位置  $\mathbf{r}'$  にある微小体積  $dV'$  に存在する電荷  $\rho(\mathbf{r}')dV'$  の作る電位を、電荷の存在する範囲にわたって重ね合わせることで得られる：

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

(第 1 章レポート問題 2)

半径  $a$  の球に電荷  $Q$  が 表面に一様に分布している場合、 内部に一様に分布している場合それぞれについて、球の中心からの距離  $r$  の位置における電位  $\phi(r)$  を求め、横軸を  $r$ 、縦軸を  $\phi(r)$  とするグラフに描け。

## 1.9 電位と電場の関係

位置  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$  における電位の差は、

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) &= -\int_{r_0}^{\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\left( \int_{r_0}^{\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}}^{r_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \right) \\ &= -\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $\Delta\mathbf{r}$  が非常に小さく、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  と  $\mathbf{E}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$  が同じとみなせるとき、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  を近似的に積分の外に出すことができる：

$$\phi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) \cong -\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}} d\mathbf{r} = -\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \Delta\mathbf{r}$$

上式を成分表示で書き直してみると、

$$\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z) \cong -(E_x(\mathbf{r})\Delta x + E_y(\mathbf{r})\Delta y + E_z(\mathbf{r})\Delta z)$$

ここで、 $\Delta y = \Delta z = 0$ とおき、両辺を  $\Delta x$  で割ると、

$$\frac{\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} \cong -E_x(\mathbf{r})$$

$\Delta x \rightarrow 0$  の極限では、上式の右辺と左辺は一致し、

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial x} \left( \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} \right) = -E_x(\mathbf{r})$$

が成立する。ここで  $\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial x}$  は関数  $\phi(\mathbf{r})$  の  $x$  に関する偏微分とよび、 $x$  以外の変数を固定し

て  $x$  で微分することを表す。このように、電位  $\phi(\mathbf{r})$  の  $x$  に関する偏微分  $\partial \phi / \partial x$  に負号をつけたものが、電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  の  $x$  成分  $E_x(\mathbf{r})$  となる。他の成分も同様に、

$$E_y(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial y}, \quad E_z(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial z}$$

と表せる。これらの関係をまとめると、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (E_x(\mathbf{r}), E_y(\mathbf{r}), E_z(\mathbf{r})) = -\left( \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial x}, \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial y}, \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial z} \right) = -\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi(\mathbf{r})$$

ここで、ベクトル演算子であるナブラ演算子

$$\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

を導入すると、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r})$$

と簡単に書ける。ナブラ演算子が、スカラー場にかかっている場合は、ナブラ演算子を **gradient** (グラディエント: 勾配) と読み、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad} \phi(\mathbf{r})$$

とも表される。 $\nabla \phi(\mathbf{r})$  を  $\phi(\mathbf{r})$  の勾配ともいう。このように電位から電場が一意的に求められる。電位が一定であるような曲面(曲線)を等電位面(線)という。等電位面(線)と電場は必ず垂直である(さもなければ、等電位面(線)に沿った方向へ電荷を動かしたと

きの仕事がゼロにならず、等電位面 (線) であることと矛盾してしまう)。

(第 1 章レポート問題 3)

位置  $\mathbf{r}'$  に置かれた電荷  $q$  がつくる電位  $\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  の勾配を計算することにより、

この電荷が作る電場が  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}$  となることを確認せよ。

### 1.10 導体

導体とは、自由に動くことのできる電子 (自由電子) を持つ物体のことである。導体内の自由電子の流れを電流と呼ぶ。電子は電荷を持っているので、導体内に電場があれば、電子は電場から力を受け導体内を移動するであろう。電荷が常に導体内を移動し続ける場合 (定常電流) は後に考えることにし、今は電荷の移動が止まっているならばどのような電荷分布が導体内で実現されているべきかを考える。まず最初に言えることは、

(i) 導体の内部では電場はゼロ :  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$

さもなくば、自由電子の移動が止まることはない。これとガウスの法則より、直ちに

(ii) 導体の内部では電荷密度はゼロ :  $\rho(\mathbf{r}) = 0$

がいえる。このことから、

(iii) 電荷分布は (あるとすれば) 導体の表面にのみ現れる (静電誘導)

また、(i) より

(iv) 導体の内部および表面の電位は一定 :  $\phi(\mathbf{r}) = \text{const.}$

がいえる。このことより、

(v) 導体表面付近の電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は、表面に垂直である

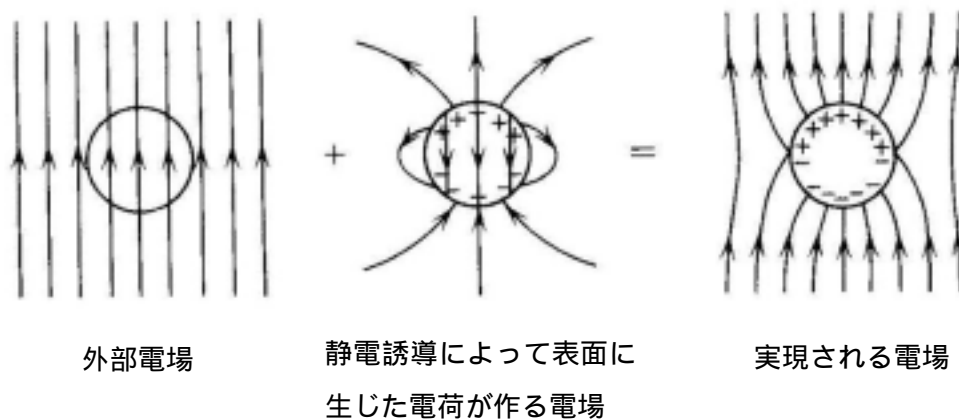
がいえる。さもなくば、電荷を導体表面上で動かした際の仕事がゼロにならず、導体表面が等電位面であることと矛盾してしまう。

(v) とガウスの法則より、次のことが言える。

(vi) 導体表面の面電荷密度が  $\sigma$  ならば、そのすぐ外側の電場の大きさは  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ 、

上に述べた導体の性質 (i) ~ (vi) は、導体が帯電している場合でも、外部電場が存在する場合でも正しい。すべては「導体内には自由電子が存在する」と「ガウスの法則」のみから導かれた。

外部電場に置かれた導体球の例で、上の性質を見てみよう。導体の表面には静電誘導により電荷分布が生じる。この電荷分布が作る電場と外部電場とが相殺し、導体内では電場ゼロが実現される。しかし導体の外では、外部電場と導体球の表面電荷が作る電場は相殺せず、結果的に導体表面から垂直に電気力線が出る。

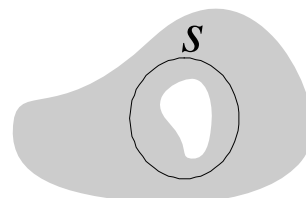


### 1.11 静電遮蔽

導体中には電場も電荷も存在し得ないが、導体中に中空部分が存在する場合はどうであろう。中空部を囲う閉曲面  $S$  をとり、この中の総電荷を考える。導体部分には電荷は存在しないのであるから、電荷は中空部分の内表面にのみ存在できる。

しかし、ガウスの法則

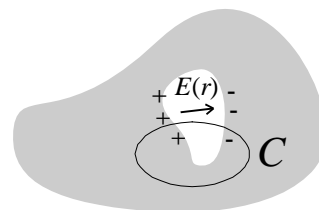
$$q_{\text{内表面}} = \epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\because \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0)$$



より、内表面の電荷の和はゼロでなければならない。つまり、もし内表面に正の電荷が帯電している部分があれば、必ず負に帯電している部分も存在するはずである。このとき、

中空部分には電場が存在することになる。そのような 2 点を通る  
右図のような閉曲線  $C$  の循環を考えると、

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\text{導体内}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \oint_{\text{中空部分}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\text{中空部分}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \neq 0$$



となり、これは電場が保存場であるという基本法則と矛盾する。したがって、内表面中空部分に電場は存在しない。また、内表面に電荷も存在しない。つまり中空部分は、その内表面も含めて外部からの電場や電荷移動の影響を全く受けない。この作用を**静電遮蔽**という(車に雷が落ちて中にもいる人間が無傷でいられるのは、この静電遮蔽のおかげである)。静電遮蔽は、クーロンの法則、つまりクーロン力の逆二乗則 ( $r^{-2}$  に比例) からの帰結であるので、静電遮蔽の確認が、クーロンの法則の検証となる。実際、逆二乗則は  $10^{-16}$  の精度で実験的に確認されている。

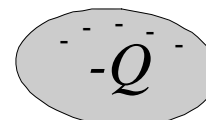
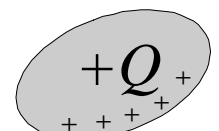
### 1.12 電気容量とコンデンサー

孤立した導体に電荷  $Q$  を与えたときに、その導体(の表面および内部)の持つ電位  $\phi$  は  $Q$  に比例する。なぜなら、 $Q$  を  $\lambda$  倍すれば、導体表面の各点での電荷密度はそのまま  $\lambda$  倍になり(さもなくば、導体内の電場がゼロにならない) 導体外部の各点の電場もそのまま  $\lambda$  倍になるからである。導体の電位と電荷の比例関係を

$$Q = C\phi$$

と書いたときに現れる比例係数  $C$  を、その導体の**電気容量**(または**静電容量**)という。電荷の単位は C (クーロン)、電位の単位は V (=J/C) (ボルト) であるから、電気容量の単位は C/V であり、これを F (ファラッド) と定義する。

次に、接近した 2 個の導体(これを**コンデンサー**と呼ぶ)にそれぞれ電荷  $Q_1$ 、 $Q_2$  を帯電させたときの、それぞれの導体の電位  $\phi_1$ 、 $\phi_2$  を考える。ここでは特に、応用上重要である  $Q_1 = -Q_2 = Q$  の場合を考える。このときに実現される導体外部の電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は、先程と同様の議論によって



電荷  $Q$  に比例する。したがって、各導体の電位も  $Q$  に比例する。

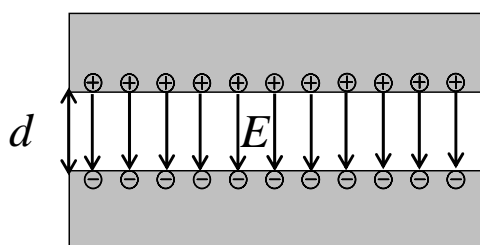
$$\phi_1 \propto Q, \phi_2 \propto Q$$

よって、2つの導体の電位差  $V_{12} \equiv \phi_1 - \phi_2$  も電荷  $Q$  に比例する。この関係を

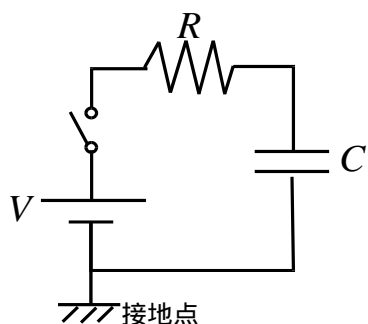
$$Q = CV_{12}$$

と書いたとき、 $C$  をコンデンサーの電気容量と呼ぶ。

(例 1) 表面積  $A$ 、間隔  $d$  の平行平板コンデンサー



(例 2) コンデンサーの充電



(第 1 章レポート問題 4)

孤立した半径  $a$  の導体球の電気容量を求めよ。また、この導体球の半径を  $1\text{m}$  として、この導体球に  $1\text{C}$  の電荷を帯電させるために必要な電池の電圧を求めよ。

電荷  $Q_0$  が帯電した静電容量  $C$  のコンデンサーを時刻  $t = 0$  に抵抗  $R$  を介して放電する。

後の時刻  $t$  におけるコンデンサーの電荷量  $Q(t)$  を求め、グラフ化せよ。



## 1.13 静電エネルギー

ある電荷分布を作り上げるのに必要なエネルギーを、その電荷分布の**静電エネルギー**と呼ぶ。例えば、電荷  $q_1$ 、 $q_2$  が位置  $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$  に存在している電荷分布の静電エネルギーは、電荷  $q_1$  を位置  $\mathbf{r}_1$  に置き (これにはエネルギーはいらない) 電荷  $q_2$  を無限遠から位置  $\mathbf{r}_2$  まで移動させるのに必要なエネルギーである。それは電荷  $q_1$  が位置  $\mathbf{r}_2$  に作る電位  $\phi_1(\mathbf{r}_2)$  に、電荷  $q_2$  をかけたものに他ならない (電位の定義):

$$U = q_2 \phi_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

一般に電荷  $q_1$ 、 $q_2$ 、... が位置  $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$ 、... に存在する場合、全静電エネルギーは、電荷を一つずつ配置するのに必要なエネルギーの総和であるから

$$\begin{aligned} U &= q_2 \phi_1(\mathbf{r}_2) + q_3 (\phi_1(\mathbf{r}_3) + \phi_2(\mathbf{r}_3)) + q_4 (\phi_1(\mathbf{r}_4) + \phi_2(\mathbf{r}_4) + \phi_3(\mathbf{r}_4)) + \dots \\ &= \sum_{i < j} q_j \phi_i(\mathbf{r}_j) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \end{aligned}$$

と表せる。ここで  $q_j \phi_i(\mathbf{r}_j) = q_i \phi_j(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$  が成立するので、これを用いて

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_j \phi_i(\mathbf{r}_j) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

と書き換えることもできる。さらに、全電荷が (電荷  $q_j$  の) 位置  $\mathbf{r}_j$  に作る電位が

$$\phi(\mathbf{r}_j) = \sum_{i \neq j} \phi_i(\mathbf{r}_j)$$

とかける (電荷  $q_j$  が作る電位が自動的に除かれている) ことを利用して、

$$U = \frac{1}{2} \sum_j q_j \phi(\mathbf{r}_j)$$

と表すこともできる。この式を電荷が連続的に分布している場合に拡張すると、

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV$$

となる。例として、面積  $S$  の平行平板コンデンサーの静電エネルギーを考える。今、コンデンサーの電位差が  $V$  で、電荷  $Q = CV$  が蓄えられているとすると、平板上の面電荷密度は  $\sigma = Q/S$  である。一方の平板は電位の基準点 (アース) なので電位ゼロ、もう片方の電位は  $V$  であるので、

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})dV = \frac{1}{2} \int \sigma(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})dS = \frac{1}{2} \sigma VS = \frac{1}{2} QV \quad (= \frac{1}{2} CV^2)$$

と計算される。これを別の方法で確認しよう。このコンデンサーに電荷  $Q'$  を蓄えたときの電位は  $V' = Q'/C$ 、このとき微小電荷  $dQ$  をコンデンサーの電極間で移動させるのに必要な仕事は  $dU = V'dQ'$ 、これを  $Q' = 0$  から  $Q' = Q$  まで積分すると、

$$U = \int_0^Q V'dQ' = \int_0^Q \frac{Q'}{C} dQ' = \frac{1}{C} \frac{1}{2} [Q'^2]_0^Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV$$

このように同様の結果を得る。

コンデンサーの電気容量は  $C = \epsilon_0 S/d$ 、コンデンサーの電圧は  $V = Ed$  とかけることから、コンデンサーのエネルギーは、

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{S}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot Sd$$

と形式的に表現できる。 $Sd$  は電場の存在する体積なので、上式は静電エネルギーが密度

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

で空間に蓄えられていると解釈することができる。この考え方は、電荷が連続的に分布する場合には常に正しいが、点電荷の作る電場には適用できない (無限大になってしまう)。

(第 1 章レポート問題 5)

半径  $a$  の導体球の表面に一様に電荷  $Q$  が帯電している。この導体の静電エネルギーを

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})dV, \quad U = \int udV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dV \text{ の 2 通りで計算し, 一致することを}$$

確認せよ。

(例) 原子核の静電エネルギー

電荷  $Q$  が一様に帯電している半径  $a$  の球を考える。中心からの距離  $r$  の位置における電場の大きさは、ガウスの法則より、

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^3} r & (0 \leq r \leq a) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & (r > a) \end{cases}$$

また、中心からの距離  $r$  の位置における電位は、無限遠を基準とすると、

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \left( 3 - \frac{r^2}{a^2} \right) & (0 \leq r \leq a) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & (r > a) \end{cases}$$

となる。この電荷分布の持つ静電エネルギーを電位と電荷密度より求めると、

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} \int_0^a \rho \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \left( 3 - \frac{r^2}{a^2} \right) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5a}$$

となり、また電場の大きさより求めると、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2(r) dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[ \int_0^a \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^3} r \right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr \right] \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a^6} \int_0^a r^4 dr + \int_a^\infty \frac{1}{r^2} dr \right) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5a} \end{aligned}$$

となり、両者は当然一致する。

質量数 (陽子と中性子の総数) が  $A$ 、原子番号が  $Z$  の原子核の半径  $a$  は、

$$a = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1.2 \times 10^{-15} \text{ m}$$

と近似的に表されることが衝突実験よりわかっている。 $a$  が  $A$  の  $1/3$  乗に比例するということは、原子核内の陽子および中性子の密度は原子種によらず、ほぼ一定であることを意味する。原子核の全電荷  $Ze$  が、この半径  $a$  の球内に一様に分布しているとみすと、原子核が持つ静電エネルギーは、

$$U = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

と表される。具体的に数値を代入すると、

$$U = 1.15 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \times 10^{-13} \text{ J} = 0.72 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \text{ MeV}$$

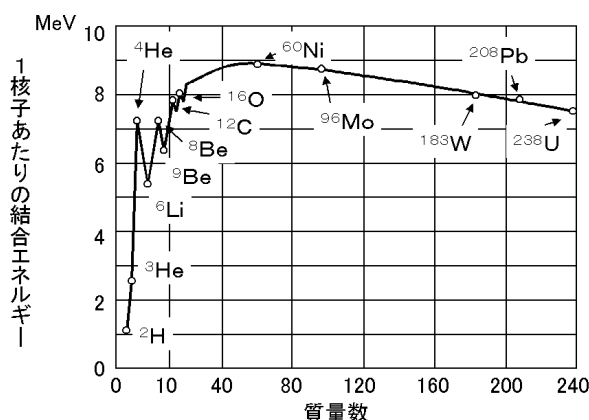
$$(1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}, 1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV})$$

安定に存在する原子核では、質量数  $A$  は原子番号  $Z$  にほぼ比例しているため、 $U \propto A^{5/3}$  となる。よって、1 核子当たりの静電エネルギーは、

$$U/A \propto A^{2/3}$$

となり、質量数の  $2/3$  乗に比例する。

核子同士はクーロン力によって互いに反発しているが、**核力**と呼ばれる強い引力によって互いに結合している。核力の到達距離は非常に短いので、引力は主に隣り合う核子間のみ働く。1 核子あたりの結合エネルギー（核子をばらばらにするのに必要なエネルギー）は、最初は質量数が大きくなるに従って増大するが、質量数が大きくなると質量数にあまり依存しなくなる。一方、1 核子あたりの静電エネルギーは  $A^{1/3}$  に比例して大きくなる（原子核が不安定になる）ので、結果的に 1 核子あたりの結合エネルギーは、下図のようになる。核分裂のエネルギー（例： $^{235}\text{U} + n \rightarrow ^{91}\text{Sr} + ^{143}\text{Xe} + 2n + 200 \text{ MeV}$ ）は、主に静電エネルギー、核融合（例： $4^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He} + 2e + 25 \text{ MeV}$ ）のエネルギーは、主に核力のエネルギーである。



## 第 2 章 定常電流

### 2.1 電流密度

導体中の正電荷 (陽子) の密度を  $\rho_+(\mathbf{r}) (> 0)$ 、負電荷 (電子) の密度を  $\rho_-(\mathbf{r}) (< 0)$  とする。正味の電荷密度は  $\rho(\mathbf{r}) = \rho_+(\mathbf{r}) + \rho_-(\mathbf{r})$  である。正電荷、負電荷がそれぞれ速度  $\mathbf{v}_+(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{v}_-(\mathbf{r})$  で移動しているとき、以下のように**電流密度**  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  を定義する：

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho_+(\mathbf{r})\mathbf{v}_+(\mathbf{r}) + \rho_-(\mathbf{r})\mathbf{v}_-(\mathbf{r})$$

実際の導体では、陽子 (原子核) は移動せず、電子のみ移動できるので、実質的に、

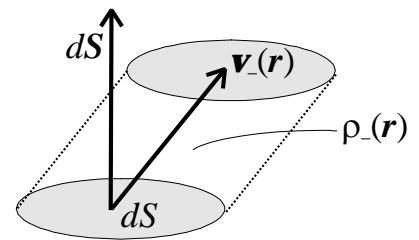
$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho_-(\mathbf{r})\mathbf{v}_-(\mathbf{r})$$

である。 $\rho_-(\mathbf{r}) < 0$  であるので、電流密度の向きは電子の移動する向きと反対になる。これを仮想的な正電荷が、電子の移動する向きと反対に流れている、と考えても (この授業でカバーする電磁気学の範囲では) 差し支えない。

導体内のある面素  $d\mathbf{S}$  を単位時間に通過する電荷量は、

$$\rho_-(\mathbf{r})\mathbf{v}_-(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

で与えられる。導線 (細長い導体) を流れる**電流**とは、導線のある断面  $S$  を単位時間に通過する電荷量で定義される：



$$I = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

特に、導線内で電流密度が一定 ( $|\mathbf{j}(\mathbf{r})| = j$ ) で、断面  $S$  が電流密度に垂直な場合、

$$I = j \int_S dS = jS$$

となる。

(第 2 章レポート問題 1)

断面積が  $1\text{mm}^2$  の銅線に  $1\text{A}$  の電流 (一秒間に  $1\text{C}$  の電荷) が流れている。銅線内の電流密度は一様と仮定して、銅線内の自由電子の移動する速さを求めよ。ただし、銅の密度は  $8.93\text{g/cm}^3$ 、原子量は  $63.5$ 、アボガド口数は  $6.02 \times 10^{23}$ 、電気素量 (電子の電荷) は  $1.60 \times 10^{-19}$  とし、銅原子 1 個あたり 1 個の自由電子を持つとする。

## 2.2 オームの法則

導体内に電場が存在すると、自由電子は電場から力を受けて移動する。定常状態では、導体内の電流密度  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  が、その位置における電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  に比例することが経験的に知られている：

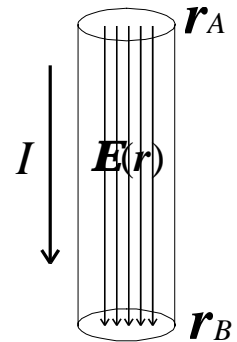
$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

これを**オームの法則**といい、比例定数  $\sigma$  は**電気伝導度**、または**電気伝導率**と呼ばれる。

断面積  $S$ 、電気伝導度  $\sigma$  の導線に電流  $I$  が流れているとき、電流の方向の電場が存在する。位置 A からみた (位置 A を基準とした) 位置 B の電位  $V$  は、

$$V = -\int_{r_A}^{r_B} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{\sigma} \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

である。導線内の電流密度は一定 ( $|\mathbf{j}(\mathbf{r})| = j = I/S$ ) と仮定し、位置 A から位置 B の向きに電流が流れているとすると、 $\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = j dl$  と書けるので



$$V = -\frac{j}{\sigma} \int_{r_A}^{r_B} dl = -\frac{j}{\sigma} l = -\frac{l}{\sigma S} I$$

と表せる。ここで  $l$  は位置 A、B 間の距離である。ここで、位置 A、B 間の**抵抗**  $R$  を

$$\frac{l}{\sigma S} \equiv R$$

と定義すると、

$$V = -RI$$

と書ける。この式も**オームの法則**と呼ばれる。上式は電流の上流を基準としたときのもので、 $V$  の値は常に負となる。そこで  $V$  は**電圧降下**と呼ばれることもある。電流の下流を基準とすれば  $V = RI$  となり、 $V$  は常に正となる。

抵抗の単位は V/A であり、これを  $\Omega$  「オーム」と定義する。  $R = l / \sigma S = l \rho / S$  ( $\rho \equiv 1 / \sigma$  : 抵抗率) より、導体の抵抗は、長さに比例し、断面積に反比例する。

### 2.3 ジュール熱

導体中に電流が流れているとき、電荷が電場から力を受けながら移動しているので、電場は電荷に仕事をしているはずである。今、抵抗  $R$  の抵抗体に電流  $I$  が流れているとすると、電流の下流から見た、この抵抗体の上流の電位は  $V = RI$  であり、単位時間あたり  $I$  の電荷が、抵抗体の上流から下流に移動するので、電荷が受ける単位時間あたりの仕事  $P$  は

$$P = VI = RI^2$$

となる。 $P$  は**仕事率** (英語では「パワー」) または**電力** と呼ばれ、単位は  $V \times A = J/C \times C/s = J/s$  で、これを  $W$  「ワット」を定義する。電荷になされた仕事は、電荷 (導体では自由電子) と抵抗体中の原子や不純物との衝突を通して、抵抗体の熱エネルギー (**ジュール熱**) に変換される。更に、その熱エネルギーを効率良く光のエネルギーに変換するものが電灯である。

### 2.4 電荷の保存則

電磁気学の基本法則の一つに、電荷の保存則がある。これを電流密度  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  を用いて表現してみよう。ある閉曲面  $S$  内にある電荷の総和の単位時間あたりの変化量は、電荷密度を  $\rho(\mathbf{r}, t)$  とすると、

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

と表せる。一方、この閉曲面  $S$  から単位時間あたり流出する電荷の総量は電流密度  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  を用いて

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

と表せる。電荷の総和が減少していれば、流出する電荷量は正であることに注意して、

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

これが、電荷の保存則を表す式である。

## 2.5 キルヒホフの第1法則

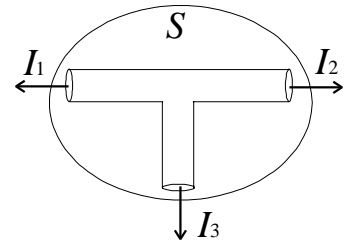
ある電気回路に定常的な電流が流れているとき（これを**直流回路**という）、回路内の電荷分布は（あるとしても）時間変化しないので、任意の閉曲面  $S$  について、電荷の保存則の式より、

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

が成立する。ここで、閉曲面  $S$  を回路の分岐点を囲むようにとると、

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \sum_i I_i = 0$$

が成立する。つまり分岐点から流れ出る電流の総和はゼロになる。これを**キルヒホフの第1法則**という。



## 2.6 起電力とキルヒホフの第2法則

電源とは、何らかの方法によって（化学反応、光による電子の励起、電磁誘導など）電極間に一定の電位差を保つ装置のことである。電源によって作られる電極間の電位差は、**起電力**または**電圧**ともよばれ、単位は電位と同じ V（ボルト）である。起電力が  $V$  の電源は、実効的に電位差  $V$  を持つ（容量無限大の）コンデンサーと同値である。

直流回路上のある閉曲線  $C$  上を単位電荷が移動するのに必要な仕事（電位） $-\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$  を考える。積分する向きを電流の正の向きと定義して決めておくと、抵抗をまたいだ積分は常に  $-\int_{\text{抵抗}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -RI$  とかける。また電源をマイナス極からプラス極の方向に積分すれば  $-\int_{\text{電源}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = V > 0$ 、逆の場合は  $-\int_{\text{電源}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = V < 0$  となる。このように起電力の符号も考慮した起電力の和  $\sum_i V_i$  と、電圧降下の和  $\sum_j -R_j I_j$  の和が  $-\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$  に他ならない。ところで、定常電流においては、 $\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$  であるので、

$$\sum_i V_i = \sum_j R_j I_j$$

が成立する。これを**キルヒホフの第2法則**という。この法則の適用には、起電力の正負と電流の向きに注意しなければならない。



## 第 3 章 静磁場

### 3.1 ローレンツ力

電荷に働く力として、これまでクーロン力を考えてきた。それは以下の形をしている：

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

自然界には、(狭い意味での)ローレンツ力と呼ばれる、電荷が運動しているときにのみ働く力が存在する。それは以下の形をとる：

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

この式に登場する  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  は磁場 (正確には磁束密度) と呼ばれ、単位を T(テスラ)とする。

一般に、電荷に働く力は、クーロン力とローレンツ力を足し合わせて

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}))$$

と表せる。これを (広い意味での) ローレンツ力と呼ぶ。

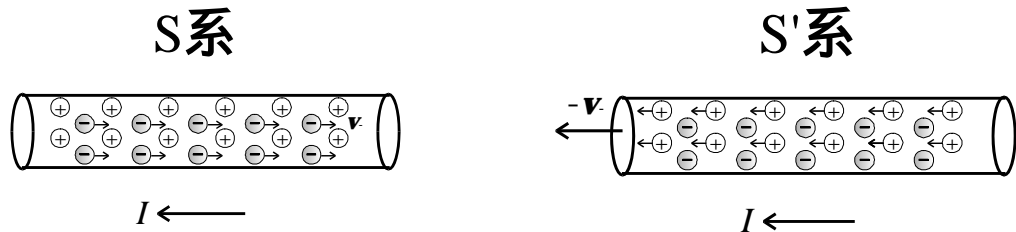
### 3.2 電流が作る磁場

電気伝導度  $\sigma$  が一定の導線に定常電流が流れているとする。導線は電氣的に中性であるから、導線内の自由電子の電荷密度を  $\rho_-$ 、正イオン (原子核 + 閉殻電子) の電荷密度を  $\rho_+$  とすると、

$$\rho_+ + \rho_- = 0$$

である。

今、導線は無間に長いとし、導線とともに静止している座標系を  $S$ 、導体内の自由電子の平均速度  $\mathbf{v}$  と同じ速度で移動している座標系を  $S'$  とする。 $S'$  系から導線を見ると、自由電子は (平均して) 静止し、正イオンは速度  $-\mathbf{v}$  で移動している。このとき、 $S'$  系で見た導線内の正イオン間の間隔は、 $S$  系 (正イオンが静止している系) での間隔に比べ、ローレンツ収縮により (速度  $\mathbf{v}$  の方向に)  $\sqrt{1-v^2/c^2}$  倍に縮んでみえる。よっての  $S'$  系での正イオンの電荷密度  $\rho'_+$  は、 $S$  系での正イオンの電荷密度  $\rho_+$  を用いて



$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (> \rho_+)$$

と表せる。同様に、 $S$  系における自由電子の電荷密度  $\rho_-$  は、 $S'$  系における自由電子の電荷密度  $\rho'_-$  と以下の関係がある ( ' の位置に注意 ):

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Leftrightarrow \rho'_- = \rho_- \sqrt{1-v^2/c^2} (< \rho_-)$$

従って、 $S'$  系における導体の電荷密度  $\rho'$  は、

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \frac{\rho_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \rho_- \sqrt{1-v^2/c^2}$$

となる。  $v \ll c$  ならば、  $\sqrt{1-v^2/c^2} \cong 1 - v^2/2c^2$ 、  $1/\sqrt{1-v^2/c^2} \cong 1 + v^2/2c^2$  と近似でき、さらに  $\rho_- = -\rho_+$  であるから、

$$\rho' \cong \rho_+ \frac{v^2}{c^2}$$

となる。つまり  $S'$  系から見ると導線は正に帯電している。

$S'$  系で正に帯電した導線が、 $S'$  系で静止している (クーロン力のみを感じる) 点電荷  $q$  に及ぼす力  $\mathbf{F}'$  は、帯電した導線が作る電場  $\mathbf{E}'$  を計算することにより

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}' = q \frac{\rho'_+ A}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\rho_+ v A}{r} v \mathbf{e}_r = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I}{r} v \mathbf{e}_r$$

と計算される。ここで  $A$  は導線の断面積、 $r$  は導線から点電荷までの距離、 $\mathbf{e}_r$  は導線と垂直で点電荷へ向かう単位ベクトルであり、電流の定義式  $I = \rho_+ v A$  を用いた。

一方、 $S'$  系で静止している点電荷  $q$  は、 $S$  系では速度  $\mathbf{v}$  で運動しているので、(狭義の) ローレンツ力が働く:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -qve_I \times \mathbf{B}$$

ここで、 $\mathbf{e}_I$  は電流の向きの単位ベクトル (自由電子の向きと逆!)、 $\mathbf{B}$  は電流の作る磁場 (これから求める) である。点電荷に働く力は  $S$  系と  $S'$  系で等しいはずだから (実際は近似的に等しい。詳しくはファインマン物理学 「電磁気学」p.166(電磁場の相対性)参照)、

$$-qve_I \times \mathbf{B} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I}{r} v \mathbf{e}_r$$

$\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{B} = 0$  (磁場は電流に垂直) と仮定し、両辺に左から  $\mathbf{e}_I$  をかける (外積をとる) と、公式  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$  より、

$$\mathbf{B}(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I}{r} \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_r$$

となる。このように、無限に長い電流のつくる磁場は、導線からの距離に反比例し、電流値に比例し、右ねじの向きである。ここで後の便宜のため、

$$\mu_0 \equiv \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \quad \left( \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2 \right)$$

と定義しておく、

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_r$$

と書ける。 $\mu_0$  は真空の透磁率と呼ばれる。その具体的な値は、 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} \times c^2$  より

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

である。

### 3.3 電流間に働く力

磁場  $\mathbf{B}$  が存在するとき、電流  $I$  が流れている導線に働く力を考える。導線の断面積を  $A$ 、自由電子の電荷密度を  $\rho_-$  とすると、自由電子の平均速度  $\mathbf{v}_-$  は

$$\mathbf{v}_- = \frac{\mathbf{j}}{\rho_-} = \frac{I}{\rho_- A} \mathbf{e}_I$$

と表せる。ここで、 $\mathbf{e}_I$  は電流の向きの単位ベクトルである。微小長さ  $dl$  内に存在する自由電子の電荷量  $dQ$  は

$$dQ = \rho_- A dl$$

この  $dl$  内に存在する自由電子に働くローレンツ力  $d\mathbf{F}$  は、

$$d\mathbf{F} = dQ \mathbf{v}_- \times \mathbf{B} = \rho_- A dl \frac{I}{\rho_- A} \mathbf{e}_I \times \mathbf{B} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} dl$$

となる。ここで電流ベクトル  $\mathbf{I} = I \mathbf{e}_I$  を定義した。このように、電流  $I$  が流れている導線には単位長さあたり  $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$  の力が働く。ここで、距離  $r$  だけ離れた二本の平行な直線電流  $\mathbf{I}_1$ 、 $\mathbf{I}_2$  間に働く力を考える。一本の無限に長い直線電流  $\mathbf{I}_1$  が、距離  $r$  の位置に作る磁場は、

$$\mathbf{B}_1(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r} \mathbf{e}_{I_1} \times \mathbf{e}_r$$

であるので、直線電流  $\mathbf{I}_2$  の微小長さ  $dl$  に働く力は

$$d\mathbf{F} = \mathbf{I}_2 \times \mathbf{B}_1 dl = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} \mathbf{e}_{I_2} \times (\mathbf{e}_{I_1} \times \mathbf{e}_r) dl = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} (\mathbf{e}_{I_2} \cdot \mathbf{e}_{I_2}) \mathbf{e}_r dl$$

となる。この力は電流の向きが同じなら引力、反対なら斥力である。この式は、電流の定義に使われている。

### 3.4 ビオ - サバルの法則

電荷にはクーロンの法則

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dV'$$

が存在し、任意の電荷分布  $\rho(\mathbf{r})$  に対して、それが作る磁場を計算できる。磁場に関しても、クーロンの法則に対応する法則は存在するだろうか。

前節より、無限に長い直線電流  $\mathbf{I}_1$  が、距離  $r$  の位置に作る磁場は、

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_r$$

と表せることがわかった。一方、線電荷密度  $\lambda$  で一様に帯電した無限に長い導線の作る電場は、ガウスの法則より、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \mathbf{e}_r$$

これら 2 式を見比べると、以下のような対応関係があるのがわかる：

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \leftrightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$$\mu_0 \leftrightarrow 1/\epsilon_0$$

$$I \leftrightarrow \lambda$$

$$\mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_r \leftrightarrow \mathbf{e}_r$$

そこで、磁場に関するクーロンの法則も、これらの対応関係に従うと推論する。電荷に関するクーロンの法則を線電荷密度  $\lambda$  で一様に帯電した無限に長い導線に適用すると、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dl$$

であるので、これに対応する磁場に関するクーロンの法則は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dl$$

と書き表せる。この推論は実際に正しく、これを**ビオ - サバルの法則**と呼ぶ。電流素片ベクトル  $d\mathbf{I} \equiv I\mathbf{e}_I dl$  を定義すれば、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{I} \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$$

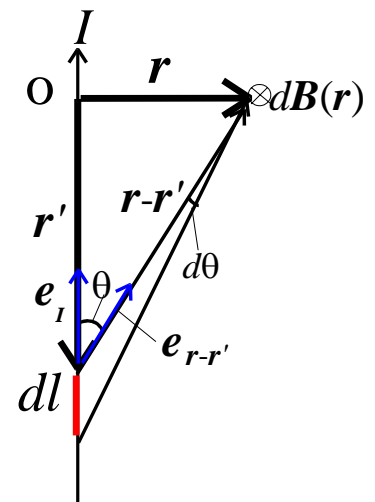
と簡単に表記できる。では、このビオ - サバルの法則から逆に、一本の無限に長い電流の作る磁場を求めてみよう。

まず、位置  $\mathbf{r}'$  にある電流素片  $I dl$  の作る磁場は

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dl$$

と表せる。ここで右図のように座標の原点をとると、

$$\mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} = \mathbf{e}_\phi \sin \theta$$



と表せるので

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I \sin \theta dl}{4\pi R^2} \mathbf{e}_\varphi$$

となる。ここで  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R$  とし、 $\mathbf{e}_\varphi$  は紙面に垂直で、電流ベクトルに対して右ねじの向きと定義する。

$$\sin \theta dl = R d\theta, \quad \sin \theta = r / R$$

であるので、これらを用いて

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I \sin \theta d\theta}{4\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

と  $\theta$  の関数で表現できる。これを  $0$  ( $l = +\infty$ ) から  $\pi$  ( $l = -\infty$ ) まで積分すると、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r} \mathbf{e}_\varphi d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

これは前節で求めていた結果と一致する。

(第 3 章レポート問題 1)

半径  $a$  の円形回路に、電流  $I$  が流れている。円の中心における磁場の大きさをビオ - サバールの法則を用いて計算せよ。余裕のあるものは、この円形回路の中心軸上の任意の点における磁場の大きさを求めよ。

### 3.5 アンペールの法則

定常電流におけるビオ - サバールの法則は、静電場におけるクーロンの法則に対応する。

クーロンの法則よりガウスの法則

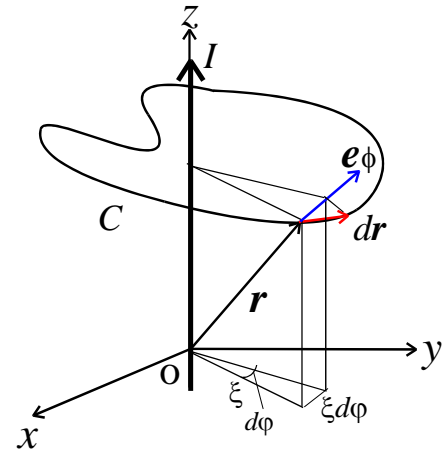
$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & (\text{電荷 } q \text{ が閉曲面 } S \text{ の外部にある場合}) \\ q & (\text{電荷 } q \text{ が閉曲面 } S \text{ の内部にある場合}) \end{cases}$$

が導かれように、ビオ - サバールの法則より以下に示すアンペールの法則が導ける：

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \begin{cases} 0 & (\text{閉曲線 } C \text{ が電流 } I \text{ を絡まない場合}) \\ \mu_0 I & (\text{閉曲線 } C \text{ が電流 } I \text{ を絡む場合}) \end{cases}$$

ここで、電流  $I$  は、経路  $C$  に対して右ねじの方向（経路  $C$  の向きにねじを回したときにねじの進む方向）を向いていれば正、その逆であれば負と定義する。上式の導出方法は、電磁気学の教科書（例えば加藤正昭著「電磁気学」（東京大学出版会）§ 3.4）に譲り、ここではアンペールの法則が実際に成り立っているかどうかを、無限に長い直線電流を例にとって確認する。右図のように円筒座標系を考え、 $z$  軸に沿って電流  $I$  が流れているとすると、この周りにできる磁場は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \xi} \mathbf{e}_\phi$$



である。ここで  $\xi$  は磁場を考える位置  $\mathbf{r}$  と電流 ( $z$  軸) までの距離、 $\mathbf{e}_\phi$  は電流に対して右ねじの向きの単位ベクトルである。このとき、

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I \oint_C \frac{1}{2\pi \xi} \mathbf{e}_\phi \cdot d\mathbf{r}$$

となるが、 $\mathbf{e}_\phi \cdot d\mathbf{r} = \xi d\phi$  と表せるので、上式は

$$\mu_0 I \oint_C \frac{1}{2\pi \xi} \xi d\phi = \mu_0 I \oint_C \frac{d\phi}{2\pi}$$

と変数  $\phi$  (偏角) の積分に帰着する。この積分は経路が電流を絡むときは  $\mu_0 I$ 、絡まないときはゼロになる。よってアンペールの法則が正しいことが示された。

一般に、複数の電流回路が存在する場合、アンペールの法則は

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \sum_{\text{経路 } C \text{ が絡む}} I_i$$

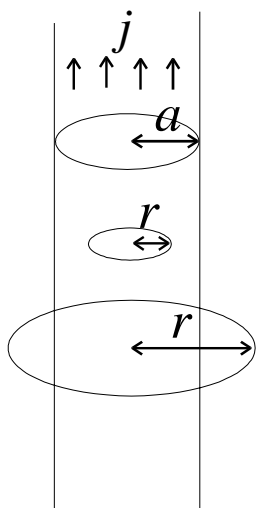
と拡張できる。更に、電流が電流密度  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  で空間的に分布している場合は、

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

となる。右辺の積分は、経路  $C$  を縁とする任意の面  $S$  に関して行い、これは経路  $C$  を貫く電流 (に  $\mu_0$  をかけたもの) に他ならない。

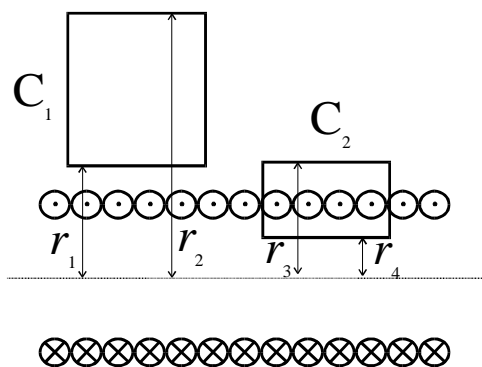
< アンペールの法則の応用例 >

半径  $a$  の無限に長い円柱状導体内を一様な電流密度  $j$  で流れる電流が作る磁場



< アンペールの法則の応用例 >

1 m あたりの巻き数が  $n$  である半径  $a$  の無限に長いソレノイドコイルに、電流  $I$  を流したときにできる磁場



( 第 3 章レポート問題 2 )

ソレノイドコイルの中心の磁場の大きさを、ビオ - サバルの法則を用いて計算せよ ( 第 3 章レポート問題 2 参照 )。アンペールの法則を用いて得られた結果と一致したか？



## 3.5 電磁気学の基本法則

静電場のクーロンの法則  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dV'$  より、電場のガウスの法則

$$\epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

および、電場の循環ゼロの法則

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

が導けた。逆に、電場ガウスの法則と循環ゼロの法則（および無限遠で電場ゼロの条件）より静電場のクーロンの法則が導ける。つまり、電場ガウスの法則と循環ゼロの法則を合わせて静電場の基本法則とすることができる。

静磁場の場合、静電場のクーロンの法則に対応するビオ - サバールの法則

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dl$$

$$\left( \text{電流が連続的に分布している場合は } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dV' \right)$$

より、アンペールの法則

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

が導ける。これは、ビオ - サバールの法則と同値ではなく、更に磁場には湧き出しがないという条件（磁場に関するガウスの法則）

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

を加えるとビオ - サバールの法則と同値になる。上式は、電流素変が作る磁場が軸対称であることから容易に証明できる。

これまで勉強した静電場、静磁場の法則をまとめると、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \quad (\text{ローレンツ力})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dV' \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV & (\text{電場のガウスの法則}) \\ \oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 & (\text{循環ゼロの法則}) \end{cases}$$

(クーロンの法則)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dV' \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} & (\text{アンペールの法則}) \\ \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0 & (\text{磁場のガウスの法則}) \end{cases}$$

(ビオ - サバルの法則)

これらの式は、**時間変化しない電場、磁場**に関しては**すべて真実である**。ただし、電場、磁場が時間変化する場合、ローレンツ力の式は依然正しいが、静電場のクーロンの法則、およびビオ - サバルの法則は厳密には正しくなくなり、以下に示す 4 つの方程式のみが真実となる：

$$\epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad (\text{ガウスの法則})$$

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{電磁誘導の法則})$$

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \left( \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{アンペールの法則})$$

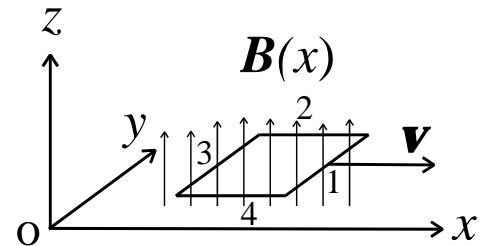
$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{磁場のガウスの法則})$$

これらをまとめて**マクスウェル方程式**と呼ぶ。静電場、静磁場の場合との違いをアンダーラインで示してある。マクスウェル方程式にローレンツ力を加えた体系が、(真空の)電磁気学の基本法則である。次章でマクスウェル方程式の第 2 式および第 3 式を導く。

## 第 4 章 時間変化する電磁場

### 4.1 誘導起電力

今、図のように  $z$  軸方向を向き、その大きさが  $x$  のみに依存する磁場  $\mathbf{B}(x) = B(x)\mathbf{e}_z$  を考え、この中で長方形の閉回路が速度  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$  で  $x$  軸方向に移動している状況を考える。導体内の電荷  $q$  は、ローレンツ力



$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(x) = qvB(x)\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = -qvB(x)\mathbf{e}_y$$

を受ける。この力によって単位電荷が回路を一周する際に受ける仕事、つまり起電力を考える。ここでは、回路を一周する向きは磁場の方向（今は  $z$  軸）に対して右ねじの向きと約束しておく。まず、ローレンツ力は  $y$  軸に平行であるから、それと垂直な辺 2 と辺 4 を移動する際には仕事を受けない。辺 1 を移動する際に受ける仕事  $dW_1$ 、辺 1 の長さを  $a$  として

$$dW_1 = \int_{\text{辺 1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -vB(x_1)a$$

となる。同様に、辺 3 を移動する際に受ける仕事  $dW_3$  は  $dW_3 = vB(x_3)a$  であるので、この回路の起電力  $V$  は

$$V = dW_1 + dW_3 = -va(B(x_1) - B(x_3))$$

と表せる。この起電力によって、 $V$  が正であれば磁場に対して右ねじの向きに電流が流れる。ところで、この回路を右ねじの向きに貫く磁束  $\Phi \equiv \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$  の単位時間あたりの変化量は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = vaB(x_1) - vaB(x_3) = va(B(x_1) - B(x_3))$$

と書き表せる。よって、この回路に生じる起電力は、

$$V = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

と表される。このように回路を貫く磁束の変化によって生じる起電力を**誘導起電力**と呼び、このような現象を**電磁誘導**と呼ぶ。誘導起電力の負号には物理的な意味がある。 $\partial\Phi/\partial t$ が正の場合、起電力  $V$  は負になり、電流は右ねじの向きとは逆に流れる。この電流によって作られる磁場は右ねじの法則より、外から加えられた磁場の向き ( $z$  軸方向) とは逆になる。つまり、誘導起電力は、**回路を貫く磁束の変化を打ち消す向き**に生じる。このような誘導起電力の向きに関する法則は**レンツの法則**と呼ばれる。これまでは誘導起電力を長方形の回路を用いて導いたが、任意の形状の回路においても電磁誘導の式は成立する。

## 4.2 誘導電場

4.1 節では、空間的に変化している磁場内を移動している回路には、ローレンツ力を源とする誘導起電力が生じることを示した。この誘導起電力は、例え回路とともに動く座標系で見ても同様に生じていなければならない (相対性原理)。しかし回路が静止している座標系では、導体内の電荷は磁場からはローレンツ力を受けることができない。したがって、静止した回路を貫く磁束が変化したときには、それに伴って電場が生じ、これが誘導起電力の源となると考えざるを得ない。このような電場を誘導電場と呼び、この電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  によって単位電荷が回路を一周する際に受ける仕事は

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

と表され、これが誘導起電力  $V = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$  に等しくなくてはならないので、

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

が成立する。電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  には電荷が作る電場を含めても、その循環はゼロであるため、依然上式は成立する。この式がマクスウェル方程式の第 2 式 (電磁誘導の法則) である。

(第 4 章レポート問題 1)

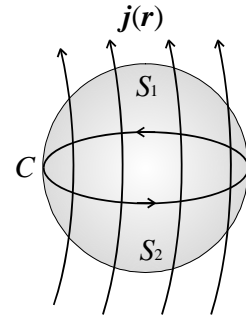
1 m あたりの巻き数が  $n$  である断面積  $S$  の無限に長いソレノイドコイルの単位長さ辺りの自己インダクタンス  $L$  を求めよ ( $L$  の定義: 誘導起電力  $V = L di / dt$ )。

### 4.3 変位電流

アンペールの法則

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

において、 $C$  は任意の閉曲線、 $S$  は  $C$  が張る任意の曲面を意味する。 $S$  として、右図のように  $S_1$  と  $S_2$  を考えると、当然



$$\int_{S_1} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \left( = \frac{1}{\mu_0} \oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \right)$$

が成り立つ。つまり、アンペールの法則が正しいなら面  $S_1$  を通る電流と面  $S_2$  を通る電流は等しくなくてはならない。これは言い換えると、 $S_1$  と  $S_2$  によって作られる平曲面  $S$  から外へ出る電流がゼロでなくてはならない：

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_2} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

一方、電荷の保存則は

$$\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

と表されるので、 $\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$  は  $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0$  を意味する。つまり、アンペールの法則が正

しいならば、電荷分布が時間的に変化してはいけないことになってしまう。しかし、例えばコンデンサーなどでは、電荷分布は時間的に変化する。そこで、電荷分布が時間的に変化してもアンペールの法則が成り立つように、電流密度の定義に修正を加えることを試みよう。つまり、新たに電流密度  $\mathbf{J} = \mathbf{j} + \mathbf{X}$  を定義し、これが

$$\int_{S_1} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

を満たせば、( $\mathbf{J}$  に関して) アンペールの法則が成立する。 $\mathbf{X}$  として何をとればよいかというヒントは電荷の保存則とガウスの法則にある。体積  $V$  内の電荷の時間微分は、ガウス

の法則より

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \frac{d}{dt} \varepsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

と表現できる。これと電荷の保存則より

$$\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_S \left( \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

が成立する。つまり、 $\mathbf{J}$  として

$$\mathbf{J} = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

とすれば、アンペールの法則が成立することになる。ここで  $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  は**変位電流**と呼ばれる。

最終的なアンペールの法則は

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \left( \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

となる。これですべてのマックスウェル方程式の最終的な形（時間変化する電磁場においても正しい方程式）がすべて得られた。ここでマックスウェル方程式を再び列挙しよう。

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad (\text{ガウスの法則})$$

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{電磁誘導の法則})$$

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \left( \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{アンペールの法則})$$

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{磁場のガウスの法則})$$