平成 17 年度冬学期　物理学 A（電磁気学）

科目：物理学 A（電磁気学）　（721 教室）

担当：鳥井　寿夫（とりい　よしお）　居室：１６号館 224A

tel: 03-5454-6757 (内線 46757)

e-mail: ytorii@phys.c.u-tokyo.ac.jp

http://maildbs.c.u-tokyo.ac.jp/~torii/

授業日：毎週水曜２限（10:40～12:10)、10/5～12/21,　1/11～1/18（計 13 回）

評価：毎回の授業で出されるレポート（50%）＋期末試験（50%）

レポートの提出期限：次回の授業の開始前。教卓にて回収。

（注意）レポートは決して他人のものを写してはならない。教科書は見てもよいが、自分の言葉で解答を表現すること（教科書の丸写しはカンニングとみなす)。提出したかどうかのみチェックするので、必ず自力でできるところまでやること。

教科書：特に指定しない。毎回配るレジュメがテキストになる。以下に参考書を挙げる

① **加藤正昭著・電磁気学**（東京大学出版会）

教養で習う電磁気学を要領よくまとめてあるスタンダードな教科書。具体例や補足説明も多い。

② **兵頭俊夫著・電磁気学**（裳華房）

電磁気学で使う数学を基礎から丁寧に説明してある。わかり易さを重視し、積分形に徹して電磁気学を論じている。

③ **ファインマン物理学 III「電磁気学」**（岩波書店）

ファインマン（1965 年ノーベル物理学賞）が実際にカリフォルニア工科大学で行った講義をまとめたもの.「電磁気学」という枠にとらわれず、物理学全体または他の学問分野を常に視野に入れた著者独特の説明は、他の教科書では見られない。不朽の教科書.

第０章　単位系

0.1 物理量の次元と単位

物理量（physical quantity）とは，測定によって客観的に定量化できる量である．次元（dimension）とは、物理量の質的違いを表すもので，物理量からその大きさを除いた概念である．単位とは，各物理量の基準となる大きさのことである．

＜国際単位系（SI: Systéme International d'Unités）＞
4 種の基本的な物理量である、**長さ、質量、時間、電流**に対して、それぞれ**メートル**（m）、**キログラム**（kg）、**秒**（s）、**アンペア**（A）を単位とし（**MKSA 単位系**）、これに温度の単位**ケルビン**（K）、物質量を表す単位**モル**（mol）、光度の単位**カンデラ**（cd）、角度の基本量**ラジアン**（rad）、および立体角**ステラジアン**（sr）を加えた 9 個を基本単位（最低限必要な単位）とする単位系。その他の単位は、それらより物理法則、定義に基づく乗除のみで導かれる（組み立て単位）。

＜基本単位の定義＞

時間：１s は、^{133}Cs の基底状態の二つの超微細構造準位（F=4, M=0 および F=3, M=0）の間のマイクロ波遷移に対応する放射の 9,192,631,770 周期の継続時間

長さ：1m は、光が 1/299792458 秒間に進む距離（光速を 299792458 m/s と定義）

質量：1kg は、キログラム原器（直径、高さとも 39mm の円柱形で、白金 90%、イリジウム 10%の合金）の質量

電流：１A は、真空中に１m の間隔で平行に置かれた無限に小さい円形断面積を有する無限に長い 2 本の直線状導体のそれぞれを流れ、これらの導体に１ m ごとに 2 x 10^{-7} N の力を及ぼし合う一定の電流

（電荷：１C（クーロン）は、１A の電流が 1s に運ぶ電荷の量）

（注）実用的に電荷より電流の方が正確に測定できるので、電流を基本単位としている。

＜組み立て単位の例＞
速度（m/s）、加速度（m/s^2）、電荷（As = C）

第１章　静電場

1.1　電荷の基本的性質

電荷に関する基本的な性質（これまでの実験事実より正しいと信じられていること）

①電荷には**プラス**と**マイナス**の 2 種類あり、同種同士は反発し、異種同士は引き合う。
（電子が持っている電荷をマイナス、原子核が持っている電荷をプラスと定義する）。

②原子核や電子の電荷は、常に**電気素量**（$e \cong 1.602 \times 10^{-19}$ C）の整数倍である。陽子の電荷は常にe、電子の電荷は常に$-e$である。（陽子や中性子を構成しているクオークは$\pm e/3, \pm 2e/3$の電荷を持つとされているが、単独では観測されない。）

③いかなる物理的または化学的変化に際しても、全電荷の和は不変である（電荷の保存則）

（例）・$H^+ + OH^- \rightarrow H_2O$　（中和反応）

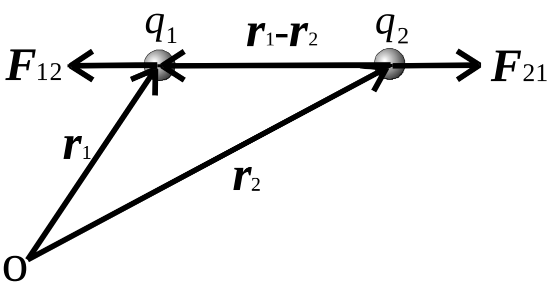
・n → p + e- + ν（β崩壊）

・ e- + $e^+ \rightarrow 2\gamma$（電子と陽電子の対消滅）

粒子	電荷
n：中性子	0
p：陽子	$+e$
ν：ニュートリノ	0
e-：電子	$-e$
γ：ガンマ線	0

1.2　二つの電荷の間に働く力の向き

電荷q_2が電荷q_1に及ぼす力を$\boldsymbol{F}_{12}$とすると、$\boldsymbol{F}_{12}$は電荷q_1、q_2を結ぶ直線上にある。（条件の軸対称性より、この直線以外の方向を向く理由がない）。このような力を一般的に**中心力**とよぶ。



このことを数学的に表現すると、

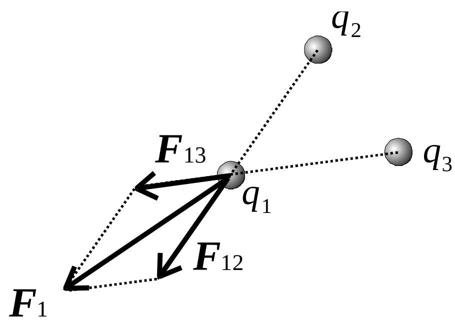
$$\boldsymbol{F}_{12} = \alpha(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$$（α は比例定数）

となる。また作用反作用の法則（経験則）より、電荷q_1が電荷q_2に及ぼす力$\boldsymbol{F}_{21}$は、$\boldsymbol{F}_{12}$と大きさは同じで向きが反対である。つまり

$$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$$

が成り立つ。

1.3　力の重ね合わせの原理

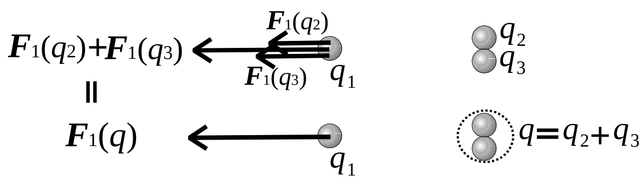


電荷q_2が電荷q_1に及ぼす力を$\boldsymbol{F}_{12}$、電荷q_3が電荷q_1に及ぼす力を$\boldsymbol{F}_{13}$とすると、電荷q_1が受ける力$\boldsymbol{F}_1$は、

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13}$$

と表せる。これを**重ね合わせの原理**という。これは自明なことではなく、実験的に確認されている経験則である。力が一般的に重ね合わせの原理に従うとは限らない（例：分子間力、核力）。この法則は電荷の数が 3 個以上のときでも成り立つ：

$$\boldsymbol{F}_1 = \sum_i \boldsymbol{F}_{1,i}$$



今、電荷q_2、q_3が同じ場所にあるとすると､実質的に$q = q_2 + q_3$という電荷がq_1に力を及ぼしていることになる。その力を$\boldsymbol{F}_1(q)$と表す。この力は、q_2だけが電荷q_1に及ぼす力を$\boldsymbol{F}_1(q_2)$とq_3だけが電荷q_1に及ぼす力を$\boldsymbol{F}_1(q_3)$の重ね合わせで表されるはずである：

$$\boldsymbol{F}_1(q) = \boldsymbol{F}_1(q_2 + q_3) = \boldsymbol{F}_1(q_2) + \boldsymbol{F}_1(q_3)$$

この関係が常に成立するためには、$\boldsymbol{F}_1(q)$の大きさは、力を及ぼす電荷qの大きさに比例していなければならない：

$$\boldsymbol{F}_1(q) \propto q$$

話を 2 つの電荷q_1、q_2に戻すと、電荷q_2が電荷q_1に及ぼす力$\boldsymbol{F}_{12}$は電荷q_2に比例する。

$$\boldsymbol{F}_{12} \propto q_2$$

同様に、電荷q_1が電荷q_2に及ぼす力$\boldsymbol{F}_{21}$は電荷q_1に比例している。

$$\boldsymbol{F}_{21} \propto q_1$$

ところで、作用・反作用の法則より、$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$であるので、

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} \propto q_1 q_2$$

が成立する。このように**2つの電荷の間に働く力は、お互いの電荷の積に比例する**。

1.4　クーロンの法則

２つの電荷の間に働く力が、２つの電荷を結ぶ直線に平行であり、その大きさが 2 つの電荷の積に比例することが、①軸対称性、②重ね合わせの原理、③作用反作用の法則より、必然的に導かれた。また、２つの電荷の間に働く力の大きさは、電荷間の距離の自乗に反比例することが実験的に確認されている（1785 年にクーロンがこれを最初に実験的に確認した)。これらの結果をまとめると、電荷 q_2 が電荷 q_1 に及ぼす力を $\boldsymbol{F}_{12}$ は、$\boldsymbol{r}$ を電荷 q_2 から電荷 q_1 に向かうベクトルとすると

$$\boldsymbol{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}$$

と表すことができる（ここで $r = |\boldsymbol{r}|$、$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$ （$\boldsymbol{r}$ の単位ベクトル）と定義した)。これは**クーロンの法則**と呼ばれ、この法則に従う静電気力を**クーロン力**という。クーロンの法則に表れる比例定数 k は、１A の電流が 1s に運ぶ電荷の量を１C とする SI 単位系では

$$k = 10^{-7}c^2 \approx 8.988\times 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$$（ただし $c \approx 2.988\times 10^8$ ms は光速）

となることが後に理論的に示される。後の便宜のため、以降、比例定数 k を

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

と表す。ここで ε_0 は**真空の誘電率**と呼ばれる（その物理的意味は後に明らかになる)。

1.5　電場

原点 $\boldsymbol{0}$ に電荷 q が置かれているとする。このとき、別の電荷 q' を位置 $\boldsymbol{r}$ に置いたとすると（実際に置くわけではないので、電荷 q' は**試験電荷**と呼ばれる)、電荷 q が電荷 q' に及ぼす力は、q' に比例し、位置 $\boldsymbol{r}$ に依存するので、一般的に

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

と表すことができる。$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は、位置 $\boldsymbol{r}$ に置かれた単位電荷が受ける力という意味を持ち、電荷 q が位置 $\boldsymbol{r}$ につくる**電場**と呼ばれる（単位は N/C)。その具体形はクーロンの法則より

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}$$

と表せる。一般に、電荷$q_1, q_2, \cdots$が位置$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots$に存在しているときに位置$\boldsymbol{r}$にできている電場$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$は、クーロン力の重ね合わせの原理が成り立つことから、個々の電荷が作る電場$\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})$の和で与えられる：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_i \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i\right|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}$$

電荷が連続的に分布しているとき、位置$\boldsymbol{r}'$の近傍の単位体積中に含まれる（平均的な）電荷の量を**電荷密度**$\rho(\boldsymbol{r})$で表し、この電荷分布が作る電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}dV'$$

と表せる。

1.6　ガウスの法則

原点 O から一定の割合q（m³/s）で縮まない流体が等方的に湧き出ているとする。このとき、位置$\boldsymbol{r}$における流体の速度場$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$は簡単な考察により、

無重力空間での水玉

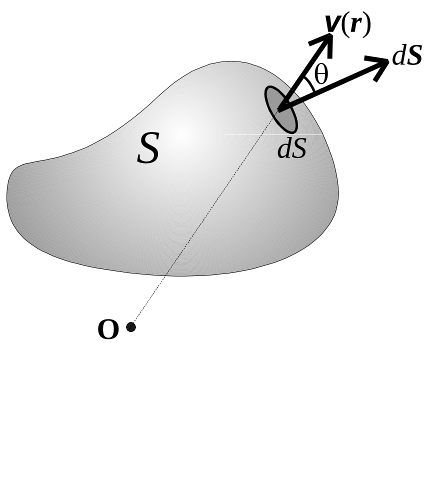
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}$$

であることがわかる。この式は電荷が作る電場を表す式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \Leftrightarrow \varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}$$

と（比例定数ε_0を除いて）数学的に等価である。つまり原点 **0** にqの湧き出しがある速度場$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$に対して成り立つ数学的な性質は、原点 **0** に電荷qがあるときの電場$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$（に$\varepsilon_0$をかけたもの）についても同様に成り立つ。

さて、速度場$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$のある空間上に、ある閉曲面$S$を考える。この閉曲面上の面素$dS$を通る流体の流量$df$は



$$df = v(\boldsymbol{r})\cos\theta\, dS = v_n(\boldsymbol{r})\, dS$$

で与えられる。ここでθは$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$と面素$dS$ の法線ベクトルとの角度、$v_n(\boldsymbol{r})=v(\boldsymbol{r})\cos\theta$は$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$の面素$dS$ の法線ベクトルへの射影成分を表す。流体が閉曲面Sから流れ出るときの流量が正と計算されるように、法線ベクトルは常に閉曲面 S の外側を向く方を考える。面素dS の法線ベクトルと同じ向きで大きさがdS であるようなベクトル$d\boldsymbol{S}$（これは**面素ベクトル**と呼ばれる）を用いれば、dS を通る流量df は

$$df=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$

と表現することもできる（以降、この表現を用いる)。この閉曲面 S 全体を通る流量f は、閉曲面S上の面素dS を通る流量df の総和であるから、以下の面積分で計算される：

$$f=\int_S df=\int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$

この閉曲面 S の中に湧き出しが存在しないならば、流体は伸びも縮みもしないのだから、この閉曲面から流れ出す流量はゼロであり、

$$\int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

が成り立つ。また、この閉曲面Sの中に湧き出しqが存在するならば、

$$\int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=q$$

が成り立つ。速度場$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$と電場に真空の誘電率$\varepsilon_0$をかけた$\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$は数学的に等価であったから、以上のことから次のことが言える。電荷qが作る電場$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$は

$$\varepsilon_0\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=\begin{cases}0 & （電荷q\text{が閉曲面}S\text{の外部にある場合}）\\ q & （電荷q\text{が閉曲面}S\text{の内部にある場合}）\end{cases}$$

を満たす。これを**ガウスの法則**と呼ばれる。上の式において，$\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$は，流体の場合の流量に相当するもので，これを面素$dS$を貫く**電束**（electric flux）と呼ぶ．ガウスの法則は,「閉曲面を貫く電束は，その閉曲面内に存在する電荷に等しい」と表現することができる．ガウスの法則は電場の重ね合わせの原理より電荷が 2 個以上存在する場合に拡張できる。すなわち，空間に電荷q_1、q_2…が存在するとき、これらの電荷が作る電場は

$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \sum_{S内部} q_i$$

を満たす。電荷が電荷密度$\rho(\boldsymbol{r})$で連続的に分布している場合には、

$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho(\boldsymbol{r}) dV$$

とかける。この式がもっとも実用的なので、この式をガウスの法則と呼ぶこともある。

ガウスの法則の応用例①　半径aの球の表面上に電荷Qが一様に帯電している場合の電場

ガウスの法則の応用例②　自由空間に電荷の安定点は存在するか？（Earnshaw の定理）

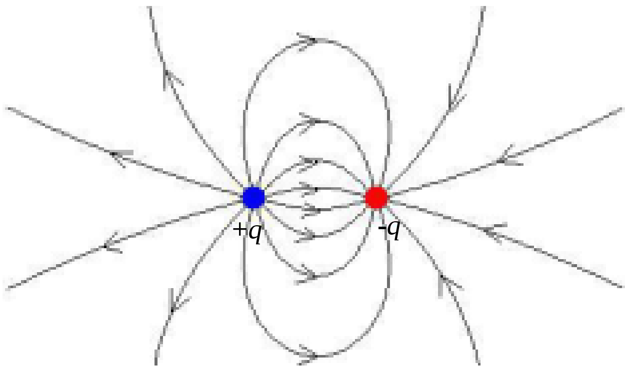
（第１章レポート問題１）

（１）無限に広い平面板上に、面密度σで一様に電荷が分布している。このとき、この平面から距離rの位置における電場の大きさをガウスの法則より求めよ.

（２）半径aの球の内部に電荷Qが一様に帯電している．このとき，球の中心からの距離rの位置における電場の大きさ$E(r)$をガウスの法則より求め，その結果を横軸r，縦軸$E(r)$とするグラフに描け.

1.7　電気力線

空間の各点の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の方向を結んで画いた曲線を**電気力線**という。電気力線は電場の様子を視覚的に表現する単なる手法であり、実体はない。電気力線は、その密度が各点での電場の大きさに比例するように描くことができる。電荷 q から q/ε_0 本の電気力線が出ていると約束すると、ある微小面積 dS を貫く電気力線の本数は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$ となる．電気力線の密度（電気力線と垂直な面における、単位面積あたりの電気力線の本数）は、電場の大きさを表す.



正負の点電荷が作る電気力線

1.8　電位

原点 **0** に置かれている電荷 q が作る電場から，別の電荷 q' が受ける力は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}$$

である．この力に抗して，電荷 q' を位置 $\boldsymbol{r}_A$ から $\boldsymbol{r}_B$ へ移動させるために必要な仕事 W_{AB} は

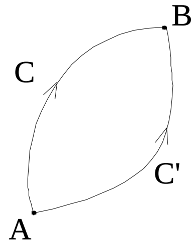
$$W_{AB} \equiv -\int_{r_A}^{r_B}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{r}$$

と表される。ここで $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}\cdot d\boldsymbol{r}$ の意味を考えると、これは微小変移ベクトル $d\boldsymbol{r}$ の動径方向への射影成分、つまり<u>原点からの距離の変化</u> dr （スカラー）を表す。よって上の積分は

$$W_{AB} = -\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$

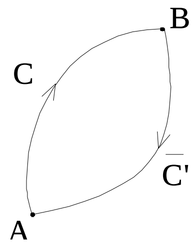
となり、これは経路に依らない（始点と終点のみで決まる)。このような力の場を**保存場**と呼ぶ（一般に中心力場は保存場である)。電荷が複数ある場合にも、重ね合わせの原理よりこの性質は維持される。

単位電荷に働くクーロン力、つまり電場$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$も当然保存場であるから、任意に選んだ２つの経路$C, C'$について



$$\int_{A(C)B} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{A(C')B} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

が成立する。ここで経路C'の始点と終点を入れ換えた経路を$\overline{C'}$とすると、



$$\int_{A(C')B} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{B(\overline{C'})A} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

が成立するので、

$$\int_{A(C)B} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{B(\overline{C'})A} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$
$$\Leftrightarrow \int_{A(C)B} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{B(\overline{C'})A} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$
$$\Leftrightarrow \oint_{A(C)B(\overline{C'})A} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

と書ける。経路$C, \overline{C'}$、位置A, Bは任意に選べるので、任意の閉じた経路Cについて

$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

が成立する。これは電場が保存場であることの別の表現であり、ガウスの法則と並んで静電場の基本法則の一つである。

クーロン力の場は保存場なので，ある基準点$\boldsymbol{r}_0$から別の位置$\boldsymbol{r}$に電荷qを動かすために必要な仕事は，位置$\boldsymbol{r}$の関数として一意的に決まる．これを，電荷qが位置$\boldsymbol{r}$で持つ**位置エネルギー**と呼ぶ。特に，単位電荷の持つ位置エネルギーを**電位**もしくは**静電ポテンシャル**と呼ぶ。単位は J/C であるが、これを V（ボルト）とも表す。位置$\boldsymbol{r}_0$を基準点とする位置$\boldsymbol{r}$の電位$\phi(\boldsymbol{r})$は以下で定義される：

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{r_0}^{r} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}\ .$$

原点 O にある電荷qがつくる電位は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

特に基準点を無限遠（$r_0 = \infty$）にとると、

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

となる。今後、特に断らない限り、電位の基準点は無限遠にとる。一般に電荷分布$\rho(\boldsymbol{r})$のつくる電位は、位置$\boldsymbol{r}'$にある微小体積dV'に存在する電荷$\rho(\boldsymbol{r}')dV'$の作る電位を、電荷の存在する範囲にわたって重ね合わせることで得られる：

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dV'$$

（第１章レポート問題２）

半径aの球に電荷Qが①表面に一様に分布している場合、②内部に一様に分布している場合それぞれについて, 球の中心からの距離rの位置における電位$\phi(r)$を求め, 横軸をr, 縦軸を$\phi(r)$とするグラフに描け.

1.9　電位と電場の関係

位置$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$における電位の差は、

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}) - \phi(\boldsymbol{r}) &= -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -\left(\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}\right) \\ &= -\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

と表せる。ここで、$\Delta\boldsymbol{r}$が非常に小さく、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$と$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})$が同じとみなせるとき、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$を近似的に積分の外に出すことができる：

$$\phi(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}) - \phi(\boldsymbol{r}) \cong -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

上式を成分表示で書き直してみると、

$$\phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \phi(x,y,z) \cong -\left(E_x(\boldsymbol{r})\Delta x + E_y(\boldsymbol{r})\Delta y + E_z(\boldsymbol{r})\Delta z\right)$$

ここで、$\Delta y = \Delta z = 0$ とおき、両辺を Δx で割ると、

$$\frac{\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} \cong -E_x(\boldsymbol{r})$$

$\Delta x \to 0$ の極限では、上式の右辺と左辺は一致し、

$$\frac{\partial \phi(\boldsymbol{r})}{\partial x}\left(\equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} \right) = -E_x(\boldsymbol{r})$$

が成立する。ここで $\dfrac{\partial \phi(\boldsymbol{r})}{\partial x}$ は関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ の x に関する<u>偏微分</u>とよび、x 以外の変数を固定して x で微分することを表す。このように、電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ の x に関する偏微分 $\partial \phi / \partial x$ に負号をつけたものが、電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の x 成分 $E_x(\boldsymbol{r})$ となる。他の成分も同様に、

$$E_y(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial \phi(\boldsymbol{r})}{\partial y}、E_z(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial \phi(\boldsymbol{r})}{\partial z}$$

と表せる。これらの関係をまとめると、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \left(E_x(\boldsymbol{r}), E_y(\boldsymbol{r}), E_z(\boldsymbol{r})\right) = -\left(\frac{\partial \phi(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \frac{\partial \phi(\boldsymbol{r})}{\partial y}, \frac{\partial \phi(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi(\boldsymbol{r})$$

ここで、ベクトル演算子である<u>ナブラ演算子</u>

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

を導入すると、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla \phi(\boldsymbol{r})$$

と簡単に書ける。ナブラ演算子が、スカラー場にかかっている場合は、ナブラ演算子を gradient（グラディエント：勾配）と読み、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{grad}\,\phi(\boldsymbol{r})$$

とも表される。$\nabla \phi(\boldsymbol{r})$ を $\phi(\boldsymbol{r})$ の<u>勾配</u>ともいう。このように電位から電場が一意的に求められる。電位が一定であるような曲面（曲線）を**等電位面（線）**という。等電位面（線）と電場は必ず垂直である（さもなければ、等電位面（線）に沿った方向へ電荷を動かしたと

きの仕事がゼロにならず、等電位面（線）であることと矛盾してしまう)。

（第１章レポート問題３）

位置 $\boldsymbol{r}'$ に置かれた電荷 q がつくる電位 $\phi(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ の勾配を計算することにより、

この電荷が作る電場が $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{e}_{r-r'}$ となることを確認せよ。

1.10 導体

導体とは、自由に動くことのできる電子（**自由電子**）を持つ物体のことである。導体内の自由電子の流れを**電流**と呼ぶ。電子は電荷を持っているので、導体内に電場があれば、電子は電場から力を受け導体内を移動するであろう。電荷が常に導体内を移動し続ける場合（定常電流）は後に考えることにし、今は電荷の移動が止まっているならばどのような電荷分布が導体内で実現されているべきかを考える。まず最初に言えることは、

（i）導体の内部では電場はゼロ：$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$

さもなくば、自由電子の移動が止まることはない。これとガウスの法則より、直ちに

（ii）導体の内部では電荷密度はゼロ：$\rho(\boldsymbol{r}) = 0$

がいえる。このことから、

（iii）電荷分布は（あるとすれば）導体の**表面にのみ**現れる（**静電誘導**）

また、（i）より

（iv）導体の内部および表面の電位は一定：$\phi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{const.}$

がいえる。このことより、

（v）導体表面付近の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は、**表面に垂直**である

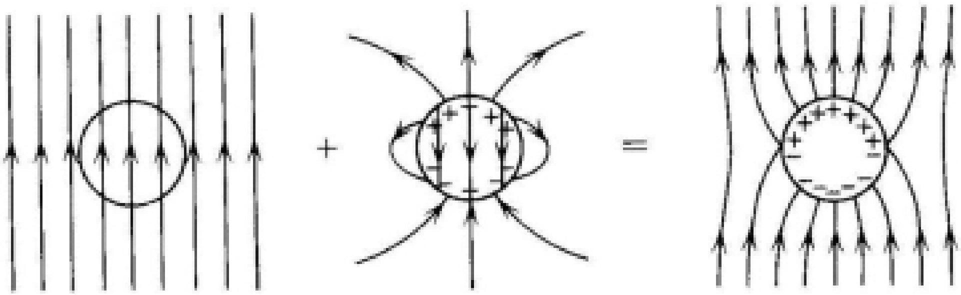
がいえる。さもなくば、電荷を導体表面上で動かした際の仕事がゼロにならず、導体表面が等電位面であることと矛盾してしまう。

（v）とガウスの法則より、次のことが言える。

（vi）$\boxed{\text{導体表面の面電荷密度が}\ \sigma\ \text{ならば、そのすぐ外側の電場の大きさは}\ E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\text{、}}$

上に述べた導体の性質（i）～（vi）は、導体が帯電している場合でも、外部電場が存在する場合でも正しい。すべては「導体内には自由電子が存在する」ことと「ガウスの法則」のみから導かれた。

外部電場に置かれた導体球の例で、上の性質を見てみよう。導体の表面には静電誘導により電荷分布が生じる。この電荷分布が作る電場と外部電場とが相殺し、導体内では電場ゼロが実現される。しかし導体の外では、外部電場と導体球の表面電荷が作る電場は相殺せず、結果的に導体表面から垂直に電気力線が出る。

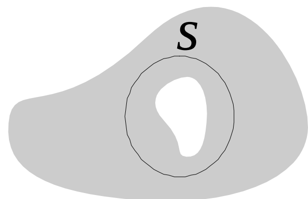


外部電場　　静電誘導によって表面に生じた電荷が作る電場　　実現される電場

1.11　静電遮蔽

導体中には電場も電荷も存在し得ないが、導体中に中空部分が存在する場合はどうであろう。中空部を囲う閉曲面 S をとり、この中の総電荷を考える。導体部分には電荷は存在しないのであるから、電荷は中空部分の内表面にのみ存在できる。

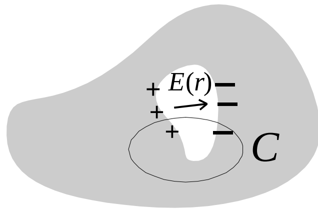
しかし、ガウスの法則



$$q_{\text{内表面}}=\varepsilon_0\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=0 \quad (\because\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0)$$

より、内表面の電荷の和はゼロでなければならない。つまり、もし内表面に正の電荷が帯電している部分があれば、必ず負に帯電している部分も存在するはずである。このとき、

中空部分には電場が存在することになる。そのような 2 点を通る右図のような閉曲線C の循環を考えると、



$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_{\text{導体内}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \oint_{\text{中空部分}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_{\text{中空部分}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \neq 0$$

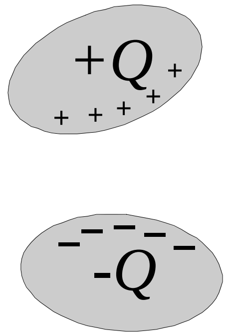
となり、これは電場が保存場であるという基本法則と矛盾する。したがって、内表面中空部分に電場は存在しない。また、内表面に電荷も存在しない。つまり中空部分は、その内表面も含めて外部からの電場や電荷移動の影響を全く受けない。この作用を**静電遮蔽**という（車に雷が落ちても中にいる人間が無傷でいられるのは、この静電遮蔽のおかげである）。静電遮蔽は、クーロンの法則、つまりクーロン力の逆二乗則（r^{-2} に比例）からの帰結であるので、静電遮蔽の確認が、クーロンの法則の検証となる。実際、逆二乗則は 10^{-16} の精度で実験的に確認されている。

1.12　電気容量とコンデンサー

孤立した導体に電荷Q を与えたときに、その導体（の表面および内部）の持つ電位ϕはQ に比例する。なぜなら、Q をλ倍すれば、導体表面の各点での電荷密度はそのままλ倍になり（さもなくば、導体内の電場がゼロにならない）、導体外部の各点の電場もそのままλ倍になるからである。導体の電位と電荷の比例関係を

$$Q = C\phi$$

と書いたときに現れる比例係数C を、その導体の**電気容量**（または**静電容量**）という。電荷の単位は C（クーロン）、電位の単位は V（=J/C）（ボルト）であるから、電気容量の単位は C/V であり、これを F（ファラッド）と定義する。



次に、接近した 2 個の導体（これを**コンデンサー**と呼ぶ）にそれぞれ電荷Q_1、Q_2を帯電させたときの、それぞれの導体の電位ϕ_1、ϕ_2を考える。ここでは特に、応用上重要である$Q_1 = -Q_2 = Q$ の場合を考える。このときに実現される導体外部の電場$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$は、先程と同様の議論によって

電荷Qに比例する。したがって、各導体の電位もQに比例する。

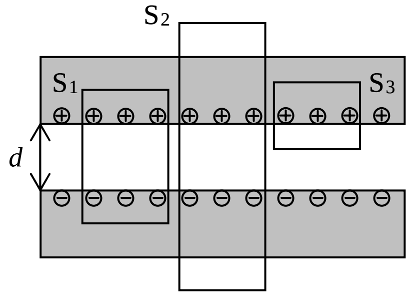
$$\phi_1 \propto Q \text{、} \phi_2 \propto Q$$

よって、2つの導体の電位差$V_{12} \equiv \phi_1 - \phi_2$も電荷$Q$に比例する。この関係を

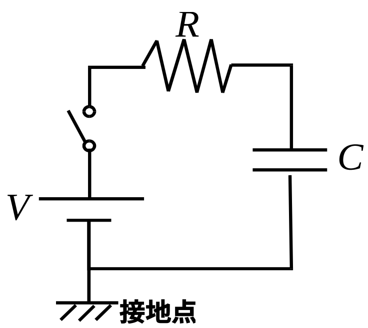
$$Q = CV_{12}$$

と書いたとき、Cをコンデンサーの電気容量と呼ぶ。

（例１）表面積A、間隔dの平行平板コンデンサー



（例２）コンデンサーの充電



（第１章レポート問題４）

①孤立した半径aの導体球の電気容量を求めよ。また、この導体球の半径を 1m として、この導体球に１C の電荷を帯電させるために必要な電池の電圧を求めよ。

②電荷Q_0が帯電した静電容量Cのコンデンサーを時刻$t=0$に抵抗Rを介して放電する。後の時刻tにおけるコンデンサーの電荷量$Q(t)$を求め、グラフ化せよ。