真空中のマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t} \qquad \left(c \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \right)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$$

波動方程式の導出①

$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t}$ の両辺に左から∇をかけると

左辺＝ $\nabla \times \left(\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right) - \left(\nabla \cdot \nabla\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\Delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

右辺＝ $-\nabla \times \dfrac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t}\right)$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t^2}$$

したがって $\Delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t^2}$ ←3次元波動方程式

波動方程式の導出②

$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t}$ の両辺に左から∇をかけると

左辺＝ $\nabla \times \left(\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right) - \left(\nabla \cdot \nabla\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -\Delta \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$

右辺＝ $\dfrac{1}{c^2}\nabla \times \dfrac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t}\right)$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t^2}$$

したがって $\Delta \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t^2}$ ←3次元波動方程式

波動方程式の解

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}}$$

成分をあからさまに書けば

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\begin{pmatrix} E_x(\boldsymbol{r},t) \\ E_y(\boldsymbol{r},t) \\ E_z(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix} E_x(\boldsymbol{r},t) \\ E_y(\boldsymbol{r},t) \\ E_z(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix}$$

電場はy軸方向を向いている（y軸方向に偏光している）とする

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_y(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y(\boldsymbol{r},t)$$

$$E_x(\boldsymbol{r},t) = E_z(\boldsymbol{r},t) = 0$$

ところで、マックスウェル方程式 $\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0$ より

$$\frac{\partial}{\partial x}E_x(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial}{\partial y}E_y(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial}{\partial z}E_z(\boldsymbol{r},t) = 0$$

であるので、これと $E_x(\boldsymbol{r},t) = E_z(\boldsymbol{r},t) = 0$ より、必然的に

$$\frac{\partial}{\partial y}E_y(\boldsymbol{r},t) = 0$$

となる。したがって、y軸方向を向いた電場の波は、y軸方向には空間依存性がない。つまり、電場の波はy軸方向に進行できない

↓

電磁波は横波

電場の波は$+x$軸方向に進行しているとする（z軸方向の空間依存性はないとする）と、波動方程式は1次元に帰着できる

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_y(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y(x,t)$$

一般的な解の形は$E_y(x \pm ct)$と表せるが、振動する解は

$E_y(x,t) = E\cos(kx - \omega t)$ ただし $c = \dfrac{\omega}{k} = \lambda f$

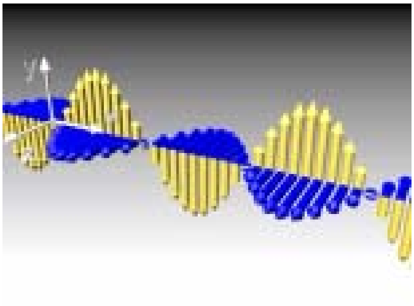
$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ ：波数　$\omega = 2\pi f$ ：角周波数

（$\boldsymbol{\lambda}$：波長、 f：周波数）

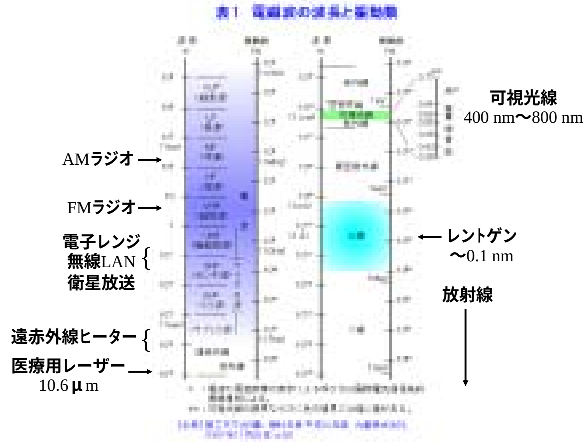
対応する磁場の解は

$B_z(x,t) = B\cos(kx - \omega t)$ ただし $B = E/c$

＋x方向に進行する電磁波



http://web.mit.edu/8.02t/www/



この講義の目標①

電磁気学の基本法則の理解

時間変化しない電磁場（静電場、静磁場）

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right)$$ （ローレンツ力）

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}dV' \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_0\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho(\boldsymbol{r})dV & \text{（電場のガウスの法則）} \\ \oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0 & \text{（循環ゼロの法則）} \end{cases}$$

（クーロンの法則）

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}dV' \Leftrightarrow \begin{cases} \oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0\int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} & \text{（アンペールの法則）} \\ \int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0 & \text{（磁場のガウスの法則）} \end{cases}$$

（ビオーサバールの法則）

時間変化する電磁場

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right)$$

$$\varepsilon_0\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho(\boldsymbol{r})dV$$

$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \underline{-\int_S \frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}}$$

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0\int_S\left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \underline{+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t}}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

これらの基本法則は、その意味も含めて、すべて覚えましょう

この講義の目標②

電磁現象の定性的理解

- 車の中は落雷に対して安全である（静電遮蔽）
- ウランが核分裂で放出されるエネルギーは原子核の静電エネルギー
  （原子力エネルギーはウランの場合、実は電気エネルギー）
- 磁気力とは、クーロン力と相対論的効果の現れである
  （磁気力は座標系によってはクーロン力とみなせる）
- 光は電磁場である

みんな理解できましたか？