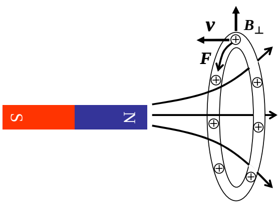
誘導起電力の起源①

コイルが磁石に対して動く場合



ローレンツ力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$
をコイル内の電荷が受けて
電流が流れる。

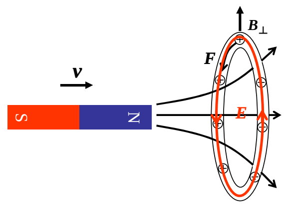
誘導起電力Vは、

$$V = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$= -\int_S \frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\cdot d\boldsymbol{S}$$

誘導起電力の起源②

磁石がコイルに対して動く場合



コイル内の電荷は静止している
ので、磁場からのローレンツ力
は働かない。しかし、電荷には
力が働き電流が流れる

↓

力（誘導起電力）の起源は電場に
あると考えざるを得ない。その電場
$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$を**誘導電場**と呼び、これは

$$V = \oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_S \frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\cdot d\boldsymbol{S}$$

を満たしていなければならない。

電場の循環（電磁誘導の法則）

磁場の時間変化が作る電場（誘導電場）$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$は、電磁誘導
の法則を満たす。

$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_S \frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\cdot d\boldsymbol{S}$$

磁場の時間変化がない場合、電荷が作る電場（クーロン電場）
が満たすべき循環ゼロの法則に自然に帰着する

$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0 \quad \text{（クーロン電場の場合）}$$

したがって、電磁誘導の法則は、電場が一般的に満たしている
基本法則である。

マクスウェル方程式（まだ不完全）

時間変化する電磁場の基本方程式

$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho(\boldsymbol{r})dV$$

$$\int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \underline{-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}}$$

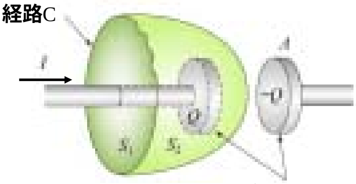
$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$ ←ここが不完全

$$\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

アンペールの法則の問題点

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$

経路C



コンデンサーの電極

曲面S_1をとれば

$$\mu_0 \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \mu_0 I$$

曲面S_2をとれば

$$\mu_0 \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

曲面の選びかたによって、右辺の値が異なる！

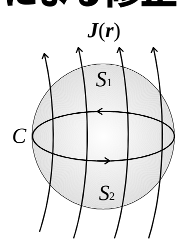
マックスウェルによる修正

あるベクトル場$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$において、

$$\int_S \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$

の値が経路Cを縁とする曲面Sの
選びかたに依らないならば、

$$\int_{S_1} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_2} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$



であるので、

$$\int_{S_1} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} - \int_{S_2} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\text{閉曲面}S} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

つまり、任意の閉曲面Sにおける$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$の湧き出しはゼロでなければならない

マックスウェルによる修正（つづき）

残念ながら電流密度$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$の湧き出しは一般にゼロにならない（先のコンデンサーの場合が良い例）。しかし、電流密度$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$に関しては、電荷の保存則が成り立っている

$$\int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_V \frac{\partial\rho(\boldsymbol{r})}{\partial t}dV$$

この式を移項してみると、

$$\int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} + \int_V \frac{\partial\rho(\boldsymbol{r})}{\partial t}dV = 0$$

さらにガウスの法則 $\int_V \rho(\boldsymbol{r})dV = \varepsilon_0\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$ を利用すると

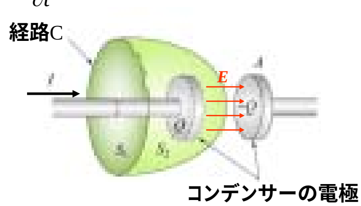
$$\int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} + \int_V \frac{\partial\rho(\boldsymbol{r})}{\partial t}dV = \int_S\left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) + \varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

湧き出しゼロのベクトル場！

修正されたアンペールの法則

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0\int_S\left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) + \varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

$\varepsilon_0\dfrac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t}$:変位電流（displacement current）



マクスウェル方程式（完全版）

時間変化する電磁場の基本方程式

$$\varepsilon_0\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho(\boldsymbol{r})dV$$

$$\int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -\underline{\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}}$$

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0\int_S\left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) + \underline{\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t}}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

マクスウェル方程式の微分形

$$\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0\left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) + \varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t}\right)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$$