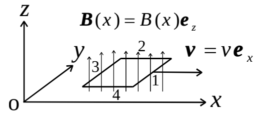
第4章 時間変化する電磁場

電磁誘導



回路を一周する向きは、磁場の方向（今はz軸）に対して右ねじの向きと約束する。

導体内の電荷qが受けるローレンツ力は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(x) = qvB(x)\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z$$
$$= -qvB(x)\boldsymbol{e}_y$$

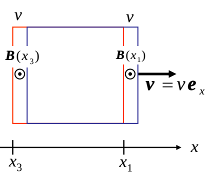
単位電荷が一辺の長さがaの回路を一周する際に受ける仕事W、を考える。

$$dW_1 = \int_{辺1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -vB(x_1)a$$
$$dW_2 = 0$$
$$dW_3 = vB(x_3)a$$
$$dW_2 = 0$$

よって、この回路に生じる**誘導起電力**Vは、

$$V = dW_1 + dW_3 = -va\left(B(x_1) - B(x_3)\right)$$

誘導起電力



この回路を右ねじの向きに貫く**磁束**

$$\Phi \equiv \int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

単位時間あたりの変化量は、

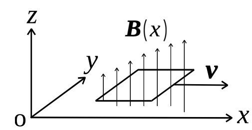
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = vaB(x_1) - vaB(x_3) = va\left(B(x_1) - B(x_3)\right)$$

よって、この回路に生じる誘導起電力は、

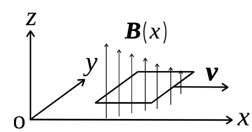
$$V = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

と表せる。

誘導起電力の向き（レンツの法則）



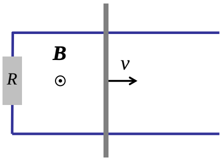
$\frac{\partial \Phi}{\partial t} > 0 \rightarrow V < 0 \rightarrow$ 電流は磁場に対して右ねじの向きと逆に流れる



$\frac{\partial \Phi}{\partial t} < 0 \rightarrow V > 0 \rightarrow$ 電流は磁場に対して右ねじの向きに流れる

誘導起電力は、**回路を貫く磁束の変化を打ち消す向きに生じる**（レンツの法則）

誘導起電力が行う仕事の起源



単位時間あたりの回路を貫く磁束の変化量は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = vaB = V \text{(誘導起電力)}$$

回路に流れる電流Iは

$$I = \frac{V}{R} = \frac{vaB}{R}$$

棒に働くローレンツ力は、

$$F = aBI = aB \cdot \frac{vaB}{R} = \frac{va^2B^2}{R}$$

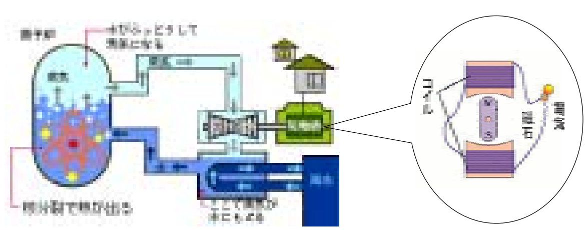
よって、棒をローレンツ力に抗して速さvで動かすために必要なパワーは、

$$P = Fv = \frac{(vaB)^2}{R}$$

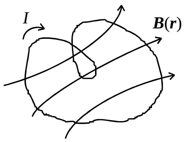
よって、抵抗で消費される電力Pは

$$P = VI = \frac{(vaB)^2}{R}$$

（原子力）発電の原理



電流回路の自己インダクタンス



電流回路が自分自身で生成する磁場（磁束）の変化も、その回路に誘導起電力を生じさせる（**自己誘導**）

電流回路が生成する磁場$B(r)$は、ビオ・サバールの法則より、回路に流れる電流Iに比例するので、回路を貫く磁束Φも、電流Iに比例する：

$$\Phi = LI$$

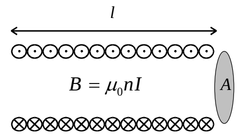
よって、回路に生じる誘導起電力は

$$V = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -L\frac{dI}{dt}$$

（L：**自己インダクタンス。単位は**Wb/A=H（**ヘンリー**））

ソレノイドコイルの自己インダクタンス

(第4章レポート問題1)



単位長さあたりの巻き数：n

コイル一巻を貫く磁束Φは、

$$\Phi = AB = \mu_0 AnI$$

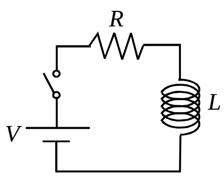
巻き数はnlなので、誘導起電力は、

$$V = -nl\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mu_0 An^2 l\frac{dI}{dt}$$

よって、ソレノイドコイルのインダクタンスは

$$L = \mu_0 n^2 Al = \mu_0 n^2 \times (\text{体積})$$

コイルに流れる電流の時間変化



時刻 $t=0$ にスイッチを入れる。

キルヒホッフの法則より

$$V - RI(t) - L\frac{dI(t)}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t) = \frac{V}{L}$$

同次方程式 $\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t) = 0$ の解は

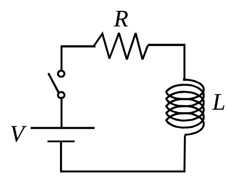
$$I'(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

また、特解は $I_p(t) = V/R$ なので、一般解は

$$I(t) = I'(t) + I_p = Ae^{-\frac{R}{L}t} + V/R$$

初期条件 $I(0)=0$ より、$I(t) = \frac{V}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$

コイルに蓄えられたエネルギー



コイルに流れる電流は、$I(t) = \frac{V}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$

コイルに生ずる誘導起電力は

$$V_C(t) = L\frac{dI(t)}{dt} = Ve^{-\frac{L}{R}t}$$

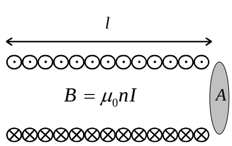
したがって、コイルに蓄えられたエネルギーは

$$U = \int_0^\infty V_C(t)I(t)dt = \frac{V^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{R}{L}t}(1-e^{-\frac{R}{L}t})dt$$

$$= \frac{V^2}{R}\left[-\frac{L}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{L}{2R}e^{-\frac{2R}{L}t}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}L\frac{V^2}{R^2} = \frac{1}{2}LI^2 \quad \left(I \equiv I(\infty) = \frac{V}{R}\right)$$

磁場のエネルギー密度



単位長さあたりの巻き数：n

ソレノイドコイルのインダクタンスは

$$L = \mu_0 n^2 Al = \mu_0 n^2 \times (\text{体積})$$

コイルに流れる電流は $I = \frac{B}{\mu_0 n}$

よって、コイルに蓄えられたエネルギーは

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 \times (\text{体積})$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\mu_0^{-1}B^2} \times (\text{体積})$$

磁場のエネルギー密度と解釈できる

電場と磁場のエネルギー（まとめ）

電場のエネルギー密度	磁場のエネルギー密度
$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$	$u = \frac{1}{2}\mu_0^{-1}B^2$
コンデンサーに蓄えられたエネルギー	コイルに蓄えられたエネルギー
$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$	$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\Phi I$