第3章
静磁場

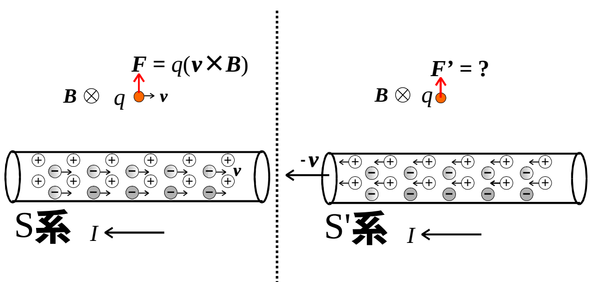
ローレンツ力（復習）

速度vで運動している電荷qが位置rで受ける力は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}))$$

と表せることが経験的にわかっている。この電荷に働く力を**ローレンツ力**と呼び、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$を**電場**、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$を**磁場**と定義する。

力の起源：電場or磁場？



$$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0 \qquad \rho' = \rho'_+ + \rho'_- = ?$$

ローレンツ収縮による導線の帯電

S系では、自由電子は速度vで動いているので、自由電子の平均的間隔は止まっている場合（S'系）の間隔の$\sqrt{1-v^2/c^2}$倍にローレンツ収縮している

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Leftrightarrow \rho'_- = \rho_- \sqrt{1-v^2/c^2} \cong \rho_-\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

S'系では、原子核は速度vで動いているので、原子核の平均的間隔は止まっている場合（S系）の間隔の$\sqrt{1-v^2/c^2}$倍にローレンツ収縮している

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cong \rho_+\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

従って、

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- \cong \rho_+\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) + \rho_-\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) = \rho_+ \frac{v^2}{c^2}$$

S系において、電荷qに働く力は、狭義のローレンツ力

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = -qv\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{B}$$

S'系において、電荷qに働く力は、クーロン力

$$\boldsymbol{F}' = q\boldsymbol{E}' = \frac{q\rho' A}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e}_r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\rho_+ vA}{r} v\,\boldsymbol{e}_r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{I}{r} v\,\boldsymbol{e}_r$$

両者は同じであろうから（電荷はどちらの系でも上向きに加速されるから）、

$$-qv\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{B} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{I}{r} v\,\boldsymbol{e}_r$$

$\boldsymbol{B} \perp \boldsymbol{e}_I$ と仮定すると

$$\boldsymbol{B}(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{I}{r}\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_r$$

近似を用いない厳密な議論は
ファインマン物理学III「電磁気学」
p166（電磁場の相対性）を参照のこと

電流が作る磁場

$$\boldsymbol{B}(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{I}{r}\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_r$$

ここで定数 $\mu_0 \equiv \dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ を導入すると、

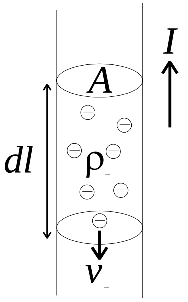
$$\boldsymbol{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_r$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m ：**真空の透磁率（定義値）**

$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2} = 8.8541878 \times 10^{-12}$ F/m ：**真空の誘電率（定義値）**

（真空中の光速：c = 299,792,458 m/s（定義値））

電流に働くローレンツ力



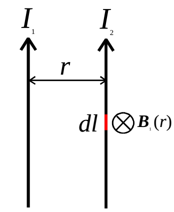
$$\boldsymbol{v}_- = \frac{\boldsymbol{j}}{\rho_-} = \frac{I}{\rho_- A}\boldsymbol{e}_I$$

$$dQ = \rho_- A\,dl$$

$$d\boldsymbol{F} = dQ\,\boldsymbol{v}_- \times \boldsymbol{B} = \rho_- A\,dl\,\frac{I}{\rho_- A}\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{B}$$

$$= \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}\,dl \qquad (\boldsymbol{I} = I\boldsymbol{e}_I)$$

電流間に働く力



$$\boldsymbol{B}_1(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{r}\boldsymbol{e}_{I_1} \times \boldsymbol{e}_r$$

$$d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}_2 \times \boldsymbol{B}_1 dl$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r}\boldsymbol{e}_{I_2} \times \left(\boldsymbol{e}_{I_1} \times \boldsymbol{e}_r\right) dl$$

$$= -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r}\left(\boldsymbol{e}_{I_1} \cdot \boldsymbol{e}_{I_2}\right)\boldsymbol{e}_r dl$$

電流が同じ（逆）向きなら、引力（斥力）

$I_1 = I_2 = 1\,\mathrm{A},\ r = dl = 1\,\mathrm{m}$

$|d\boldsymbol{F}| = \frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$ （電流の定義）

電場と磁場の法則のアナロジー

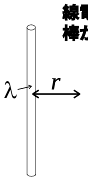
クーロンの法則

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'} dl$$

ビオ･サバールの法則

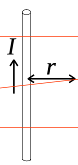
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'} dl$$

線電荷密度λの無限に長い棒が作る電場



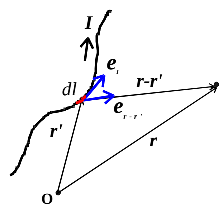
$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\boldsymbol{e}_r$$

電流Iの無限に長い導線が作る電場



$$\boldsymbol{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_r$$

ビオ･サバールの法則



$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'} dl$$

$d\boldsymbol{I} \equiv I\boldsymbol{e}_I dl$ と定義すれば、

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{d\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}$$

連続的な電流分布への拡張

クーロンの法則

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'} dl$$

$$\lambda dl \leftrightarrow \rho(\boldsymbol{r}')dV'$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'} dV'$$

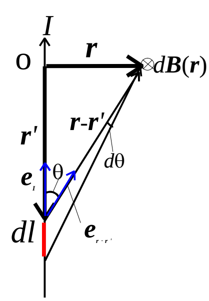
ビオ･サバールの法則

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'} dl$$

$$I\boldsymbol{e}_I dl \leftrightarrow \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')dV'$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} dV'$$

無限に長い直線電流の作る磁場



$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} dl$$

$$\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'} = \boldsymbol{e}_\varphi \sin\theta \qquad |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \equiv R$$

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin\theta dl}{R^2}\boldsymbol{e}_\varphi$$

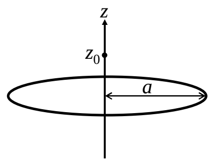
$$\sin\theta dl = R d\theta \quad \sin\theta = r/R$$

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{r}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\theta}{r}\boldsymbol{e}_\varphi d\theta = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\boldsymbol{e}_\varphi$$

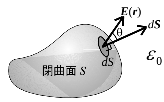
第3章レポート問題1

半径aの円形回路に、電流Iが流れている。円の中心における磁場の大きさをビオーサバールの法則を用いて計算せよ。
余裕のあるものは、この円形回路の中心軸(z軸)上の任意の位置$z = z_0$における磁場の大きさを求めよ。



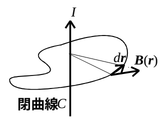
ガウスの法則とアンペールの法則

ガウスの法則



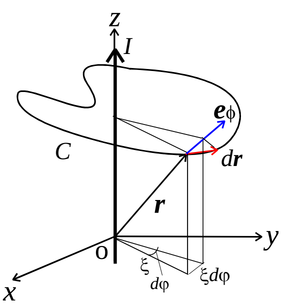
$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \begin{cases} 0 & \text{（電荷}q\text{が閉曲面}S\text{の外部にある場合）} \\ q & \text{（電荷}q\text{が閉曲面}S\text{の内部にある場合）} \end{cases}$$

アンペールの法則



$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \begin{cases} 0 & \text{（閉曲線}C\text{が電流}I\text{を絡まない場合）} \\ \mu_0 I & \text{（閉曲線}C\text{が電流}I\text{を絡む場合）} \end{cases}$$

無限に長い直線電流の場合



電流が作る磁場は、

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\xi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

よって、経路Cにおける循環は、

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 I \oint_C \frac{1}{2\pi\xi}\boldsymbol{e}_\varphi \cdot d\boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{e}_\varphi \cdot d\boldsymbol{r} = \xi d\varphi$ と表せるので

$$\mu_0 I \oint_C \frac{1}{2\pi\xi}\xi d\varphi = \mu_0 I \oint_C \frac{d\varphi}{2\pi}$$

アンペールの法則

複数の電流回路がある場合

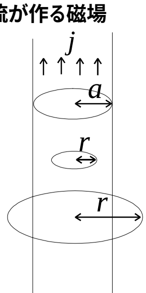
$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \sum_{\text{経路}C\text{が絡む}} I_i$$

電流が電流密度$j(r)$で分布している場合

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

アンペールの法則の応用例①

半径aの無限に長い円柱状導体内を一様な電流密度jで流れる電流が作る磁場

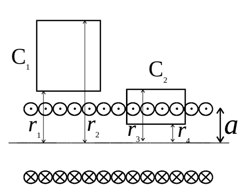


i) $0 \le r \le a$ の場合

ii) $r > a$ の場合

アンペールの法則の応用例②

1mあたりの巻き数がnである半径の無限に長いソレノイドコイルに、電流Iを流したときにできる磁場

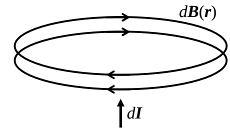


第3章レポート問題2

ソレノイドコイルの中心の磁場の大きさを、ビオ･サバールの法則を用いて計算せよ（第3章レポート問題1参照）。アンペールの法則を用いて得られた結果と一致したか？

磁場の湧き出し

ビオ･サバールの法則より、電流要素$d\boldsymbol{I}$は回転対称な（トーラス型の）磁場を作る



どのような閉曲面Sをとっても、$\int_S d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=0$

磁場の重ね合わせの原理より、一般に $\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=0$

これまでのまとめ

時間変化しない電磁場（静電場、静磁場）の基本法則

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=q\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right)$$ （ローレンツ力）

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}dV' \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_0\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V \rho(\boldsymbol{r})dV & \text{（電場のガウスの法則）} \\ \oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=0 & \text{（循環ゼロの法則）} \\ \text{境界条件（無限遠で電場がゼロに収束）} & \end{cases}$$

（クーロンの法則）

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}dV' \Leftrightarrow \begin{cases} \oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\mu_0\int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} & \text{（アンペールの法則）} \\ \int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=0 & \text{（磁場のガウスの法則）} \\ \text{境界条件（無限遠で磁場がゼロに収束）} & \end{cases}$$

（ビオーサバールの法則）

微分系への準備
その①：ガウスの定理

$$\int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})dV$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\equiv\frac{\partial v_x(\boldsymbol{r})}{\partial x}+\frac{\partial v_y(\boldsymbol{r})}{\partial y}+\frac{\partial v_z(\boldsymbol{r})}{\partial z}\left(\equiv \mathrm{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\right)$$

「∇･」または「div」は「ダイバージェンス(divergence)」と読む

微分系への準備
その②：ストークスの定理

$$\oint_C \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\int_S\left(\nabla\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\equiv\left(\frac{\partial v_z(\boldsymbol{r})}{\partial y}-\frac{\partial v_y(\boldsymbol{r})}{\partial z},\frac{\partial v_x(\boldsymbol{r})}{\partial z}-\frac{\partial v_z(\boldsymbol{r})}{\partial x},\frac{\partial v_y(\boldsymbol{r})}{\partial x}-\frac{\partial v_x(\boldsymbol{r})}{\partial y}\right)$$

$$\left(\equiv \mathrm{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\right)$$

「∇×」または「rot」は「ローテーション（rotation）」と読む

ガウスの法則の微分形

ガウスの定理（数学）　　ガウスの法則（物理）

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})dV$$

$$\varepsilon_0\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V \varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})dV=\int_V \rho(\boldsymbol{r})dV$$

任意の体積Vで上の式が成り立つためには、積分の中身は同じでなければならないので、

$$\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\rho(\boldsymbol{r})$$

アンペールの法則の微分形

ストークスの定理 (数学)

$$\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_V \left(\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

アンペールの法則 (物理)

$$\int_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \left(\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right)\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$

任意の閉曲面Sで上の式が成り立つためには、積分の中身は同じでなければならないので、

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$$

静電磁場の基本法則

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right)$$

＜微分形＞	＜積分形＞
$\varepsilon_0 \nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$	$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho(\boldsymbol{r})dV$
$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$	$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0$
$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$	$\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0$
$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$	$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$

マクスウェル方程式

時間変化する電磁場の基本方程式

$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho(\boldsymbol{r})dV$$

$$\int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \underline{-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}}$$

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) + \underline{\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t}}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$