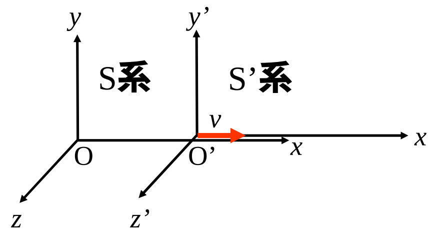
特殊相対性理論
(第3章「静磁場」への準備)

二つの慣性系



S’系はS系に対してx軸正の方向に速さvで移動している

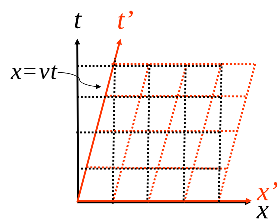
問題提起

- S系において時刻t、位置xで起きた事象は、S’系においていつ(x’)どこで(t’)観測されるのだろうか？

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

(x, t) から (x’, t’) への写像 (一次変換行列) の具体形が知りたい。

我々の常識 (ガリレイ変換)



S系とS’系には同じ時間が流れている ⇨ $t' = t$

S系における $x=vt$の線が、S’系における x’= 0 の線 ⇨ $x' = x - vt$

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

ガリレイ変換

ガリレイ変換の破綻

S系では時刻 $t = 0$ に位置 $x = 0$より発せられた光は、1秒後($t = 1$)に位置 $x = c$ に到達する。

この現象をS’系でみると、

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-v \\ 1 \end{pmatrix}$$

S’系では1秒後(t’ = 1)に位置 x’ = c-v に到達する。
従って、S’系での光速は<u>c-v</u>。

→地球上の光速は光の進行方向に依存しないというマイケルソン-モーレーの実験 (1887年) と矛盾！

特殊相対性理論
(A. Einstein,1905)

＜二つの基本原理＞

- 物理法則はすべての慣性系に対して同じ形で表される (相対性原理)
- 真空中の光の速さは光源の運動状態に無関係である (光速不変の原理)

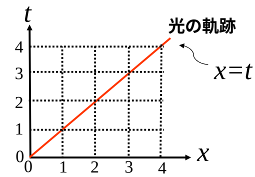
我々 (Einstein) の目標

<u>相対性原理</u>と<u>光速不変の原理</u>を同時に満たすような、S系とS’系間の時空座標の一次変換行列を新たに求める。

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

準備：時間の単位の再定義

後の議論を簡単にするため、1/c秒を、あらためて1秒と定義し、光は1秒間に1m進むものとする。(光速を1m/秒とする)



注) 元の単位に戻るには、$t \rightarrow ct,\ v \rightarrow \dfrac{v}{c}$ と置き換えればよい

条件　その1 (光速不変の原理)

S系では時刻 $t = 0$ に位置 $x = 0$より発せられた光は、1秒後($t = 1$)に位置 $x = 1$ に到達する。この現象をS’系で観測すると、

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$$

S’系での光速も1であるから

$$\frac{x'}{t'} = \frac{a+b}{c+d} = 1$$

$$\therefore a+b = c+d \cdots ①$$

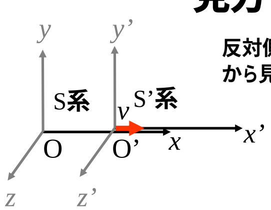
条件　その2 (相対速度)

S’系の原点 ($x' = 0$) は、S系から見て速度vで動いている。したがって、S系の時空座標$(x,\ t) = (v,\ 1)$のS’系におけるx'座標は0である (t'座標は不明)

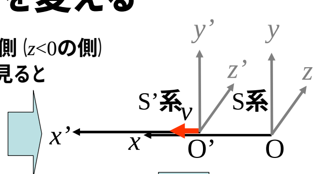
$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ? \end{pmatrix}$$

$$\therefore av + b = 0 \cdots ②$$

見方を変える

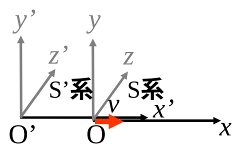


反対側 (z<0の側)
から見ると



更にx, x’軸の正の向きを逆に定義すると

x, x’軸の正の向きを逆に定義すると、S系とS’系の立場が入れ替わる！



条件　その3 (相対性原理)

S’系がS系に対してx軸正の方向に速度vで移動している状況は、(x, x’軸の正の向きを逆に定義すれば) S系がS’系に対してx’軸正の方向に速度vで移動しているとみなすこともできる。どちらの見方でも、相対性原理により、物理法則 (つまり一次変換行列) は同じはずである。

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow[x' \rightarrow -x']{x \rightarrow -x} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

同じ

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

ここでx, x'軸の正の向きを逆に定義すると

$$\begin{pmatrix} -x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x' \\ t' \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} \quad ③$$

以上、まとめると、

$$a+b=c+d \cdots ① \quad \text{(光速不変の原理)}$$

$$av+b=0 \cdots ② \quad \text{(相対速度で決まる条件)}$$

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdots ③ \quad \text{(相対性原理)}$$

①、②、③より

$$a=d=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad b=c=-\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

現実（SI単位系）に戻ろう。

$t \to ct$, $v \to \frac{v}{c}$, $t' \to ct'$, $v' \to \frac{v'}{c}$ **の置き換えをすると**

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

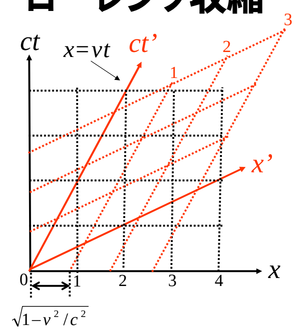
$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

ローレンツ変換

$$x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad t = \frac{t'+vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

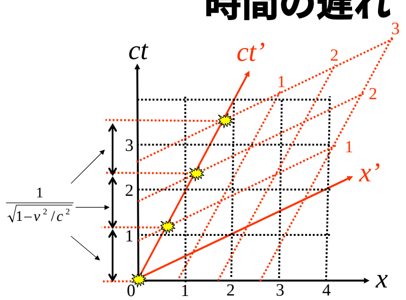
ローレンツ逆変換

ローレンツ収縮



S'系で長さLの物体は、S系では長さが$L\sqrt{1-v^2/c^2}\,(<L)$ に見える

時間の遅れ



S'系で $x'=0$ にあるフラッシュランプは、S'系の時計では1秒おきに点灯。

S系の時計では

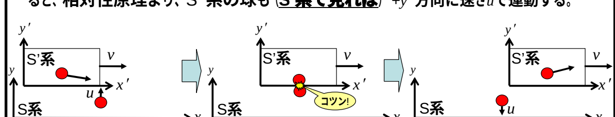
$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(>1)$$

秒おきに点灯。

S'系の時間は、S系からみると $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(>1)$ 倍遅く流れているように見える

質量の増加（相対論的質量）

それぞれの系では、質量 m_0 の球が同じ速さu（例えば1m/sで）$+y$ ($-y'$) 方向に運動している（つもりでいる）。衝突後、S系の球が$-y$ 方向に速さuで運動したとすると、相対性原理より、S'系の球も（**S'系で見れば**）$+y'$ 方向に速さuで運動する。

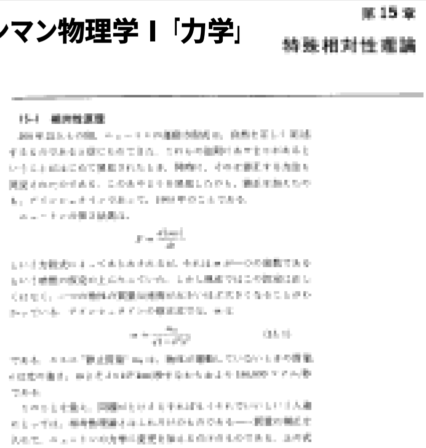


しかし、**S系から見ると**、S'系の時計は $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 倍遅れているので、S'系の球はy軸方向の速さが$u\sqrt{1-v^2/c^2}$ で近づき、$u\sqrt{1-v^2/c^2}$ で遠ざかるように見える。

S系から見た、S'系の球の質量をmとすると、S系における運動量保存則より

$$\underset{\text{(衝突前)}}{m_0 u - mu\sqrt{1-v^2/c^2}} = \underset{\text{(衝突前)}}{-m_0 + mu\sqrt{1-v^2/c^2}} \to m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

ファインマン物理学 I「力学」



質量とエネルギーの等価性

速度v で運動する粒子の運動量を、次のように定義し、これがニュートンの運動方程式 $F=\dfrac{dp}{dt}$ に従うとする。

$$p \equiv mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

この粒子のエネルギーの変化 dE は、力 F がこの粒子にした仕事 Fdx に等しいから

$$dE = Fdx = \frac{dp}{dt}dx = v\,dp$$

したがって、この粒子のエネルギーは、両辺を積分して、次のように表せる。

$$E = \int_0^p v\,dp = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2} - m_0c^2 = mc^2 - m_0c^2$$

この粒子が元からエネルギー m_0c^2 (静止エネルギー) を持っていたと考えると、

$$E = mc^2$$

静止した粒子の振動数

粒子の全エネルギー

$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2} = mc^2 \quad \left(m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)$$

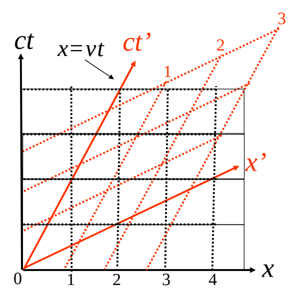
アインシュタインの関係式

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad \left(\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \right)$$

静止した粒子のエネルギーに対応する振動数

$$\hbar\omega = m_0c^2 \rightarrow \omega = \frac{m_0c^2}{\hbar}$$

S系の波の振動をS'系で見ると



<S系>

$$e^{-i\omega t} = e^{-i\frac{m_0c^2}{\hbar}t}$$

ローレンツ逆変換

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

<S'系>

$$e^{-i\frac{m_0c^2}{\hbar}t} = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t'} e^{-i\frac{mv}{\hbar}x}$$

$\dfrac{mv}{\hbar}\lambda = 2\pi$ より $\lambda = \dfrac{h}{mv}$

ド・ブロイの関係式

(参照) ファインマン物理学V「量子力学」第7章