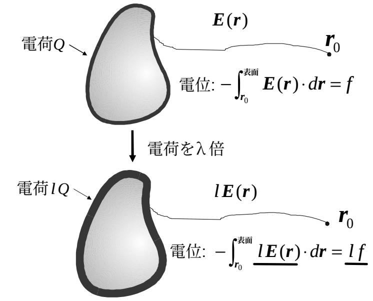
導体の電位と電荷の関係



導体の電位は、帯電している電荷量に比例する

導体の静電容量

導体の電位と電荷の比例関係を

$$Q = Cf$$

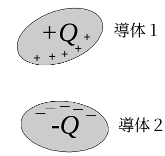
と表したときの比例定数Cを、その導体の**静電容量**という。
電気容量の単位はC/Vであり、これをF（ファラッド）と定義する。

接近した2個の導体は**コンデンサー**と呼ばれる。
導体1,2に電荷±Q（Q>0）を帯電させた場合、

$$f_1 \propto Q \qquad f_2 \propto Q$$

であるから、導体1,2の電位差$V \equiv f_1 - f_2$
も電荷Qに比例する。この関係を

$$Q = CV$$

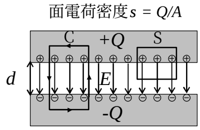


と書いたとき、Cをコンデンサーの**電気（静電）容量**と呼ぶ

平行平板コンデンサー

平板の寸法に比べ、平板の間隔dが十分小さければ、平板の外部に漏れ出す電場の大きさは、平板内の電場の大きさに比べ無視できる。

面電荷密度$s = Q/A$



経路Cにおける電場の循環はゼロ
→平板間の電場の大きさEは一様

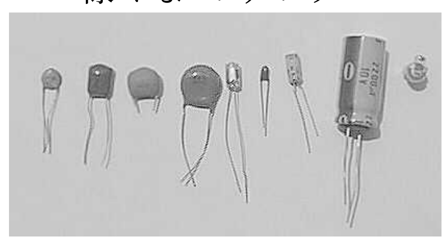
閉曲面Sにガウスの法則を適用
→電荷の面密度は $s = e_0 E$

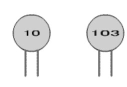
$Q = sA, E = V/d$ より

$$Q = \boxed{e_0 \frac{A}{d}} V$$

コンデンサーの電気容量

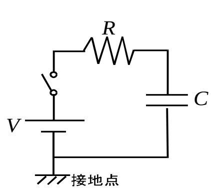
様々なコンデンサー





2桁の場合は、そのままpFの単位で読む
3桁（○△□）の場合は、○△×10□pF
例）103の場合、10×10^{3}pF=10nF

コンデンサーの充電



時刻 $t = 0$ にスイッチを入れる。
キルヒホッフの法則より

$$V - RI(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

電流と電荷の関係 $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ より、

$$\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{V}{R}$$

同次方程式 $\frac{dQ'(t)}{dt} + \frac{1}{RC}Q'(t) = 0$ の解は

$$Q'(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

また、特解は $Q_p(t) = CV$ なので、一般解は

$$Q(t) = Q'(t) + Q_p = Ae^{-\frac{t}{RC}} + CV$$

初期条件 $Q(0) = 0$ より、$Q(t) = CV(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

第1章レポート問題4

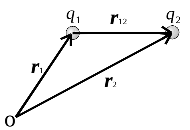
①孤立した半径aの導体球の電気容量Cを求めよ。また、この導体球の半径を1mとして、この導体球に1Cの電荷を帯電させるために必要な電池の電圧を求めよ。

②電荷Q_0が帯電した静電容量Cのコンデンサーを時刻t=0に抵抗Rを介して放電する。後の時刻tにおけるコンデンサーの電荷量$Q(t)$を求め、グラフ化せよ。

静電エネルギー

ある電荷分布を作り上げるのに必要なエネルギーを、その電荷分布の**静電エネルギー**と呼ぶ。

＜二個の点電荷の場合＞



電荷q_1を位置$\boldsymbol{r}_1$に置く↔エネルギーはいらない

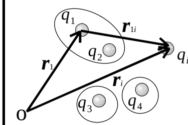
電荷q_2を位置$\boldsymbol{r}_2$に置く

→

$$U = q_2 f_1(\boldsymbol{r}_2) = \frac{1}{4pe_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

静電エネルギー

＜複数の点電荷の場合＞



$$\begin{aligned} U &= q_2 f_1(\boldsymbol{r}_2) \\ &\quad + q_3\left(f_1(\boldsymbol{r}_3) + f_2(\boldsymbol{r}_3)\right) \\ &\quad + q_4\left(f_1(\boldsymbol{r}_4) + f_2(\boldsymbol{r}_4) + f_3(\boldsymbol{r}_4)\right) \\ &\quad + \cdots \\ &= \sum_{i>j} q_i f_j(\boldsymbol{r}_i) = \frac{1}{4pe_0}\sum_{i>j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \end{aligned}$$

$$\sum_{i>j} q_i f_j(\boldsymbol{r}_i) = \begin{array}{cccc} & q_1 f_2(\boldsymbol{r}_1) & q_1 f_3(\boldsymbol{r}_1) & q_1 f_4(\boldsymbol{r}_1) \\ q_2 f_1(\boldsymbol{r}_2) & & q_2 f_3(\boldsymbol{r}_2) & q_2 f_4(\boldsymbol{r}_2) \\ q_3 f_1(\boldsymbol{r}_3) & q_3 f_2(\boldsymbol{r}_3) & & q_3 f_4(\boldsymbol{r}_3) \\ q_4 f_1(\boldsymbol{r}_4) & q_4 f_2(\boldsymbol{r}_4) & q_4 f_3(\boldsymbol{r}_4) & \end{array}$$

ところで、

$$q_i f_j(\boldsymbol{r}_i) = q_j f_i(\boldsymbol{r}_j) = \frac{1}{4pe_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

より

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} q_i f_j(\boldsymbol{r}_i)$$

$$\begin{array}{ll} q_1\sum_{j\neq 1} f_j(\boldsymbol{r}_1) & \boxed{\quad\quad q_1 f_2(\boldsymbol{r}_1) \quad q_1 f_3(\boldsymbol{r}_1) \quad q_1 f_4(\boldsymbol{r}_1)} \\ q_2\sum_{j\neq 2} f_j(\boldsymbol{r}_2) & \boxed{q_2 f_1(\boldsymbol{r}_2) \quad\quad q_2 f_3(\boldsymbol{r}_2) \quad q_2 f_4(\boldsymbol{r}_2)} \\ q_3\sum_{j\neq 3} f_j(\boldsymbol{r}_3) & \boxed{q_3 f_1(\boldsymbol{r}_3) \quad q_3 f_2(\boldsymbol{r}_3) \quad\quad q_3 f_4(\boldsymbol{r}_3)} \\ q_4\sum_{j\neq 1} f_j(\boldsymbol{r}_4) & \boxed{q_4 f_1(\boldsymbol{r}_4) \quad q_4 f_2(\boldsymbol{r}_4) \quad q_4 f_3(\boldsymbol{r}_4) \quad\quad} \end{array}$$

電荷q_1, q_2, …が位置$\boldsymbol{r}_i$に作る電位は、一般的に $f(\boldsymbol{r}_i) = \sum_{j\neq i} f_j(\boldsymbol{r}_i)$ と表せるので、

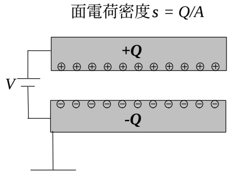
$$U = \frac{1}{2}\sum_i q_i f(\boldsymbol{r}_i)$$

これを連続的な電荷分布に拡張すると、

$$U = \frac{1}{2}\int r(\boldsymbol{r}) f(\boldsymbol{r})\, dV$$

コンデンサーの静電エネルギー①

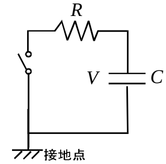
面電荷密度$s = Q/A$



$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int r(\boldsymbol{r}) f(\boldsymbol{r})\, dV \\ &= \frac{1}{2}\int s(\boldsymbol{r}) f(\boldsymbol{r})\, dS \\ &= \frac{1}{2} sVA \\ &= \frac{1}{2} QV\left(= \frac{1}{2}CV^2\right) \end{aligned}$$

コンデンサーの放電によって放出されるエネルギー

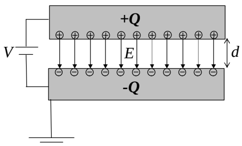
電位差がVのコンデンサーを、時刻 $t = 0$ に放電させる。



$$I(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\begin{aligned} U &= \int_0^\infty R I^2(t)\, dt = \frac{V^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}} dt \\ &= \frac{V^2}{R}\left[-\frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{2} CV^2 \end{aligned}$$

コンデンサーの静電エネルギー②



$$C = e_0 \frac{A}{d}, \quad V = Ed \quad \text{より}$$

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} e_0 \frac{A}{d} (Ed)^2$$

$$= \frac{1}{2} e_0 E^2 \times Ad$$

$$= \frac{1}{2} e_0 E^2 \times (\text{電場の存在する体積})$$

エネルギー密度 $u = \frac{1}{2} e_0 E^2$ で静電エネルギーが空間に蓄えられている

第1章レポート問題5

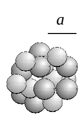
半径aの導体球の表面に一様に電荷Qが帯電している。
この導体の静電エネルギーを

① $U = \frac{1}{2} \int r(\boldsymbol{r}) f(\boldsymbol{r}) dV$

② $U = \int u dV = \frac{1}{2} e_0 \int E^2 dV$

の2通りで計算し, 一致することを確認せよ。

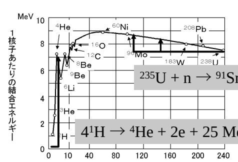
原子核の静電エネルギー



$$U = \frac{(eZ)^2}{4pe_0} \frac{3}{5a} \qquad a = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1.2 \times 10^{-15} \text{m}$$

Z:原子番号
A:質量数

$$U = 1.15 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \times 10^{-13} \text{ J} = 0.72 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \text{ MeV}$$



$^{235}U + n \rightarrow {}^{91}Sr + {}^{143}Xe + 2n + 200$ MeV

$4\,{}^1H \rightarrow {}^4He + 2e + 25$ MeV

結合エネルギー