一般的なガウスの法則

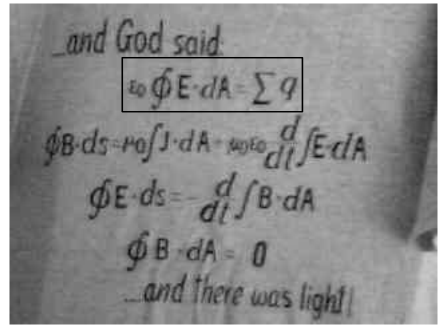
複数の電荷q_1, q_2, …が存在するとき、

$$e_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \sum_{S内部} q_i$$

電荷が電荷密度$r(\boldsymbol{r})$で連続的に分布している場合には

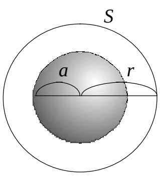
$$e_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V r(\boldsymbol{r}) dV$$

1つ制覇



ガウスの法則の応用例①

半径aの球の表面上に電荷Qが一様に帯電している場合の電場



対称性より、電場は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\boldsymbol{e}_r$ と表せる

i) $r>a$のとき

ガウスの法則より

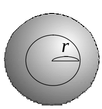
$$e_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V r(\boldsymbol{r}) dV$$

左辺$= e_0 \int_S E(r)\boldsymbol{e}_r \cdot d\boldsymbol{S} = e_0 E(r) \int_S dS = 4pe_0 r^2 E(r)$

右辺$=Q$

従って$4pr^2 E(r) = Q$

故に $E(r) = \dfrac{1}{4pe_0}\dfrac{Q}{r^2}$ $\quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{4pe_0}\dfrac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_r$

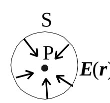


ii) $0<r<a$のとき

同様に右辺$= 4pe_0 r^2 E(r)$ 右辺$=0$ より$E(r) = 0$

ガウスの法則の応用例②

自由空間に電荷の安定点は存在するか？



背理法を用いる

点Pが電荷（正電荷とする）安定点だとすると、この点Pの近傍の電場は点Pの方向を向いていなければならない。点Pを囲む微小な閉曲面Sを考えると、この閉曲面S上のどこでも電場は内向きなので、この閉曲面Sから湧き出る電束の和は必ず負になる。一方、この閉曲面S内の電荷の和は（自由空間を考えているので）当然ゼロである。したがって、これはガウスの法則と矛盾するので、電荷の安定点は存在し得ない。
（Earnshawの定理）

第1章レポート問題１

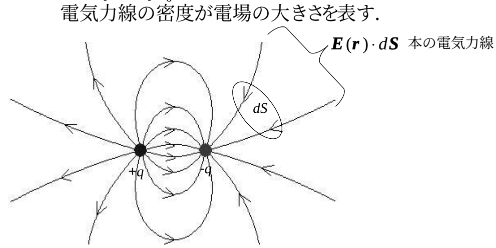
(1) 無限に広い平面板上に、面密度ρで一様に電荷が分布している。このとき、この平面から距離rの位置における電場の大きさ$E(r)$をガウスの法則より求めよ.

(2) 半径aの球の内部に電荷Qが一様に帯電している. このとき, 球の中心からrの距離の位置における電場の大きさ$E(r)$をガウスの法則より求め, その結果を横軸r, 縦軸$E(r)$とするグラフに描け.

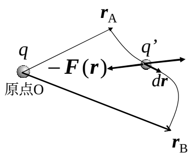
電気力線

電場の方向を結んで描いた曲線（実体はない）

電荷qからq/e_0本の電気力線が出ていると約束すると、電気力線の密度が電場の大きさを表す.



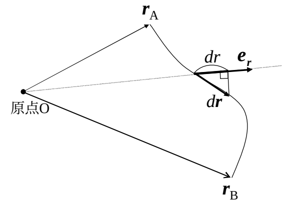
電荷を運ぶのに必要な仕事



$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4pe_0}\frac{qq'}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

電荷q'を位置$\boldsymbol{r}_{\rm A}$から$\boldsymbol{r}_{\rm B}$へ移動させるために必要な仕事は

$$W_{AB} \equiv -\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{qq'}{4pe_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{r}$$



$$\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{r} = dr$$

原点からの距離の変化

$$W_{AB} = -\frac{qq'}{4pe_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{qq'}{4pe_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = \boxed{\frac{qq'}{4pe_0}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)}$$

始点と終点のみで決まる
仕事が経路に依らない）
→$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$は保存場

q=1のとき、$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$=$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$であるから、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$も保存場

保存場$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$の性質

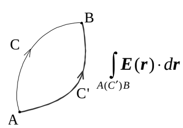
仕事が経路に依存しないので

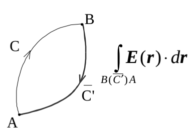
$$\int_{A(C)B}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{A(C')B}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\Leftrightarrow \int_{A(C)B}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{B(\overline{C'})A}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\Leftrightarrow \int_{A(C)B}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{B(\overline{C'})A}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

$$\Leftrightarrow \oint_{A(C)B(\overline{C'})A}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$





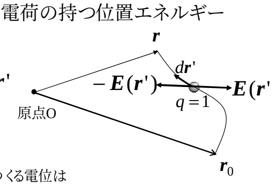
経路C,C'、位置A, Bは任意に選べるので、一般に

$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$ ←$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$が保存場であることの数学的表現

電位

基準点$\boldsymbol{r}_0$から別の位置$\boldsymbol{r}$に単位電荷を運ぶために
必要な仕事、つまり単位電荷の持つ位置エネルギー
単位はJ/C）

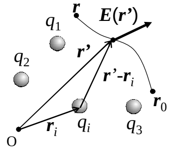
$$f(\boldsymbol{r}) \equiv -\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'$$



特に、原点Oにある電荷qがつくる電位は

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4pe_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right) \xrightarrow[\text{基準点を無限遠にとると}]{r_0\to\infty} \frac{1}{4pe_0}\frac{q}{r}$$

電荷が複数存在している場合

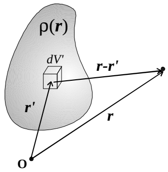


$$f(\boldsymbol{r}) = -\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'$$

$$= -\frac{1}{4pe_0}\sum_i\int_{r_0}^{r}\frac{q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}\cdot d\boldsymbol{r}'$$

$$= \frac{1}{4pe_0}\boxed{\sum_i\frac{q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|}}$$

電荷が連続的に分布している場合



$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4pe_0}\boxed{\int\frac{r(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'}$$

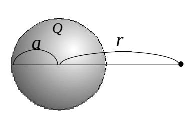
第 1章レポート問題 2

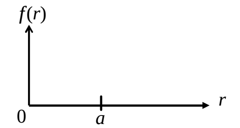
半径aの球に電荷Qが

①表面に一様に分布している場合

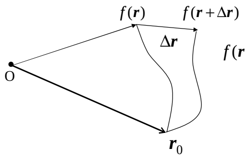
②内部に一様に分布している場合

それぞれについて, 球の中心からの距離rの位置における電位を求め, 横軸をr , 縦軸を$\Phi(r)$とするグラフに描け.





電位と電場の関係



$$f(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})-f(\boldsymbol{r})=-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'+\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'$$
$$=-\left(\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'+\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_0}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'\right)$$
$$=-\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'$$

$\Delta\boldsymbol{r}$ が小さければ、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')$ は近似的に一定とみなせるので

$$f(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})-f(\boldsymbol{r})\cong-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{r}'=-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\Delta\boldsymbol{r}$$

$f(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})-f(\boldsymbol{r})\cong-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\Delta\boldsymbol{r}$ を成分に分けて表すと

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)\cong-\left(E_x(\boldsymbol{r})\Delta x+E_y(\boldsymbol{r})\Delta y+E_z(\boldsymbol{r})\Delta z\right)$$

$\Delta y=\Delta z=0$として、両辺をΔxで割ると、

$$\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}\cong-E_x(\boldsymbol{r})$$

従って

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}\equiv\boxed{\frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial x}=-E_x(\boldsymbol{r})}$$

y,z成分に関しても同様に、

$$\boxed{\frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial y}=-E_y(\boldsymbol{r}),}\ \boxed{\frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial z}=-E_z(\boldsymbol{r})}$$

以上の結果ををまとめると

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\left(E_x(\boldsymbol{r}),E_y(\boldsymbol{r}),E_z(\boldsymbol{r})\right)=-\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial x},\frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial y},\frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right)$$
$$=-\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)f(\boldsymbol{r})$$

ここで次のような演算子を定義する

$$\nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$ **:ナブラ演算子**

これを用いれば、電場と電位の関係は、次のように簡単に表現できる：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\nabla f(\boldsymbol{r})$$

ナブラ演算子はスカラー関数にかかる場合「グラディエント(gradient)」（日本語では「**勾配**」）と読む

第1章レポート問題3

位置$\boldsymbol{r}'$に置かれた電荷がつくる電位

$$f(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4pe_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

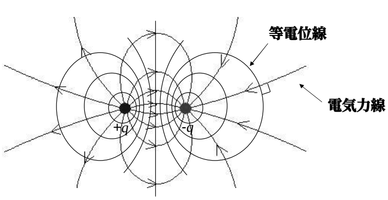
の勾配を計算することにより、この電荷が作る電場が

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\nabla f(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4pe_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}$$

となることを確認せよ。

等電位面（線）

電位の等しいような面（線）のこと



等電位面（線）と電気力線（電場）は必ず垂直である（さもなければ、等電位面（線）に沿った方向へ電荷を動かしたときの仕事がゼロにならず、等電位面（線）であることと矛盾してしまう）。

カーボン紙を用いた等電位線の作図