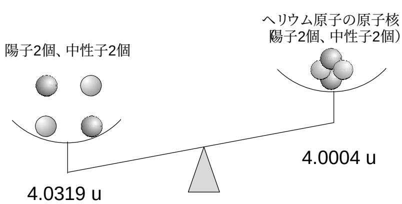
第1章
静電場

電荷の基本的性質

1. 電荷には**プラス**と**マイナス**の2種類あり、同種同士は反発し、異種同士は引き合う。
2. 原子核や電子の電荷は、常に**電気素量**（e=1.602 x 10^{-19} C）の整数倍である。陽子の電荷は常にe、電子の電荷は常に-eである。（陽子や中性子を構成しているクオークはe/2,e/3の電荷を持つとされているが、単独では観測されない。）
3. いかなる物理的または化学的変化に際しても、全電荷の和は不変である（電荷の保存則）

電荷と質量の大きな違い

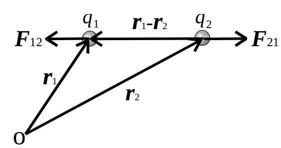
質量は保存しない！（質量素量などない）



(u = ^{12}C/12 = 1.66x10^{-27}kg)原子質量単位

$E = mc^2$ (質量はエネルギーの一形態)

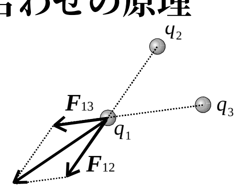
二つの電荷の間に働く力の向き



対称性より $\boldsymbol{F}_{12} = a(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$ （**中心力**）

作用・反作用の法則より $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$

力の重ね合わせの原理

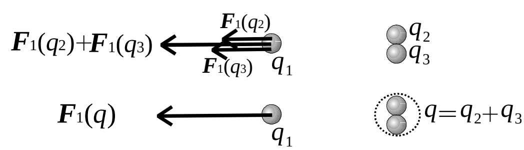


$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13}$$

複数の力が働いている場合

$$\boldsymbol{F}_1 = \sum_i \boldsymbol{F}_{1,i}$$

力と電荷の関係①



力の重ね合せの原理より

$$\boldsymbol{F}_1(q) = \boldsymbol{F}_1(q_2 + q_3) = \boldsymbol{F}_1(q_2) + \boldsymbol{F}_1(q_3)$$

これを満たすには

$$\boldsymbol{F}_1(q) \propto q$$

力と電荷の関係②

$\boldsymbol{F}_{12} \propto q_2$　　　$\boldsymbol{F}_{21} \propto q_1$

作用・反作用の法則より

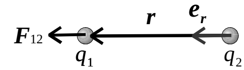
$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$$

したがって

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} \propto q_1 q_2$$

2つの電荷の間に働く力は、お互いの電荷の積に比例する。

クーロンの法則



電荷q_2が電荷q_1に及ぼす力$\boldsymbol{F}_{12}$は、$\boldsymbol{r}$を電荷q_2から電荷q_1に向かうベクトルとすると

$$\boldsymbol{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \quad \left(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \equiv \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

$$k = 10^{-7} c^2 \approx 8.988 \times 10^9 \ \mathrm{Nm^2/C^2}$$

真空の誘電率

後の便宜のために $k = \dfrac{1}{4pe_0}$ と定義すると

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4pe_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}$$

e_0 **:真空の誘電率**

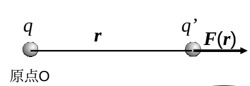
電磁気学における電場・磁場の定義

速度$\boldsymbol{v}$で運動している電荷qが位置$\boldsymbol{r}$で受ける力は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}))$$

と表せる。この電荷に働く力をローレンツ力と呼び、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$を電場、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を磁場と定義する。

クーロンの法則の解釈



<遠隔作用の考え方>

電荷 q とq' との間に、クーロン力

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4pe_0}\frac{qq'}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

が**直接**働く(空間は変化しない)

<近接作用の考え方>

電荷 q によって、空間にベクトル場

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4pe_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

が作られる。位置 $\boldsymbol{r}$ に電荷 q' を置くと、この電荷は電場から

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4pe_0}\frac{qq'}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

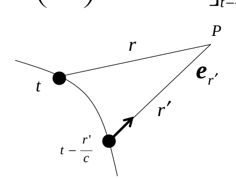
が働く

任意の運動をする点電荷のつくる電場
リエナール-ヴィーヒェルトポテンシャル
(ファインマン物理学Ⅱ3章、Ⅲ20章)

静電場

$$\boldsymbol{E} = \left[\boxed{\frac{q}{4pe_0}\boxed{\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r'^2}}} + \frac{r'}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r'^2}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{e}_{r'}\right]_{t-\frac{r'}{c}}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{e}_{r'} \times \boldsymbol{E}}{c}$$

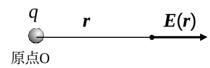


これを重ね合わせることにより、世の中全ての電磁現象を説明できる

電荷の作る電場

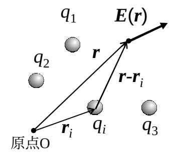
原点Oに置かれた電荷 q が位置 $\boldsymbol{r}$ につくる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4pe_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}$$



一般に、複数の電荷q_1, q_2, …が位置$\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, …に存在しているとき、位置$\boldsymbol{r}$における電場は、クーロン力の重ね合わせの原理より

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\sum_i \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4pe_0}\sum_i\frac{q_i}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i\right|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}$$

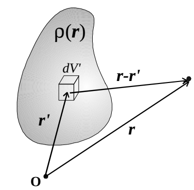


電荷分布の作る電場

電荷が連続的に分布しているとき、位置$\boldsymbol{r}'$の近傍の単位体積中に含まれる電荷の量を**電荷密度**$r(\boldsymbol{r})$で表すことにすると、この電荷分布が作る電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4pe_0}\int\frac{r(\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}dV'$$

と表せる。

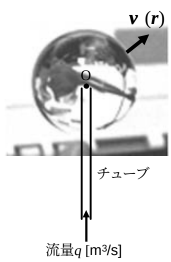


流体の速度場

原点Oから一定の割合q[m³/s]で縮まない流体が等方的に湧き出ているとする。このとき、位置$\boldsymbol{r}$における流体の速度場$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$[m/s]は

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4p}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}$$

と表せる。



速度場と電場のアナロジー

$$\text{電場}:\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4pe_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}\Leftrightarrow e_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boxed{\frac{1}{4p}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}}$$

数学的に等価

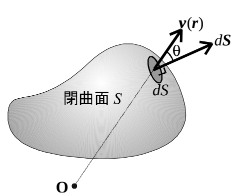
$$\text{速度場}:\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})=\boxed{\frac{1}{4p}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}}$$

原点Oに流量q の湧き出しがある速度場$v(r)$に関して成立つ数学的な性質は、原点Oに電荷qがあるときの電場 (にe_0をかけたもの)についても同様に成立つ。

面素を通る流体の流量

ある閉曲面S上の面素 dS を単位時間に通る流体の流量df は、

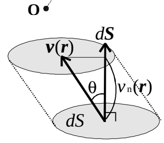
$$df=v(\boldsymbol{r})\cos q\,dS=v_n(\boldsymbol{r})dS$$



面素の法線ベクトル (閉曲面から湧き出る方向を正とする)と同じ向きで、大きさがdSであるようなベクトル$d\boldsymbol{S}$ (**面素ベクトル**と呼ばれる) を用いれば、

$$df=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$

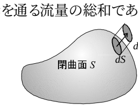
と簡単に表現できる。



閉曲面から湧き出る流量

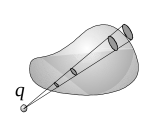
閉曲面Sを通って流れ出る流量は、閉曲面S上の面素を通る流量の総和であるから、

$$f=\int_S df=\int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$



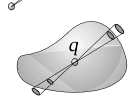
閉曲面Sの中に湧き出しが存在しないならば、

$$\int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=0$$



閉曲面Sの中に湧き出しがqが存在するならば、

$$\int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=q$$



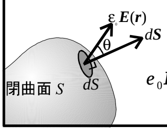
ガウスの法則

速度場$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$と電場$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$に真空の誘電率をかけた$e_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$は数学的に等価

電荷が作る電場は

$$e_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \begin{cases} 0 & \text{電荷}q\text{が閉曲面Sの外部にある場合} \\ q & \text{電荷}q\text{が閉曲面Sの内部にある場合} \end{cases}$$

を満たす。これを**ガウスの法則**と呼ぶ。



$e_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$ は**電束**と呼ばれる 流体のような実態はない）