波動方程式の導出①

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t}$$ の両辺に左から∇をかけると

左辺＝$\nabla \times \left(\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right) - \left(\nabla \cdot \nabla\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\Delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

右辺＝$-\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t}\right)$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t^2}$$

したがって $\Delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t^2}$ ←3次元波動方程式

波動方程式の導出②

$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t}$の両辺に左から∇をかけると

左辺＝$\nabla \times \left(\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right) - \left(\nabla \cdot \nabla\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -\Delta \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$

右辺＝$\dfrac{1}{c^2}\nabla \times \dfrac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t}\right)$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t^2}$$

したがって $\Delta \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t^2}$ ←3次元波動方程式

波動方程式の解

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}}$$

成分をあからさまに書けば

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\begin{pmatrix} E_x(\boldsymbol{r},t) \\ E_y(\boldsymbol{r},t) \\ E_z(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix} E_x(\boldsymbol{r},t) \\ E_y(\boldsymbol{r},t) \\ E_z(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix}$$

電場はy軸方向を向いている（y軸方向に偏光している）とする

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_y(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y(\boldsymbol{r},t)$$

$$E_x(\boldsymbol{r},t) = E_z(\boldsymbol{r},t) = 0$$

ところで、マックスウェル方程式 $\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=0$ より

$$\frac{\partial}{\partial x}E_x(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial}{\partial y}E_y(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial}{\partial z}E_z(\boldsymbol{r},t)=0$$

であるので、これと $E_x(\boldsymbol{r},t)=E_z(\boldsymbol{r},t)=0$ より、必然的に

$$\frac{\partial}{\partial y}E_y(\boldsymbol{r},t)=0$$

となる。したがって、y軸方向を向いた電場の波は、y軸方向には空間依存性がない。つまり、電場の波はy軸方向に進行できない

↓

電磁波は横波

電場の波は$+x$軸方向に進行しているとする（z軸方向の空間依存性はないとする）と、波動方程式は1次元に帰着できる

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_y(x,t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y(x,t)$$

一般的な解の形は$E_y(x\pm ct)$と表せるが、振動する解は

$$E_y(x,t)=E\cos(kx-\omega t) \quad \text{ただし} \quad c=\frac{\omega}{k}=\lambda f$$

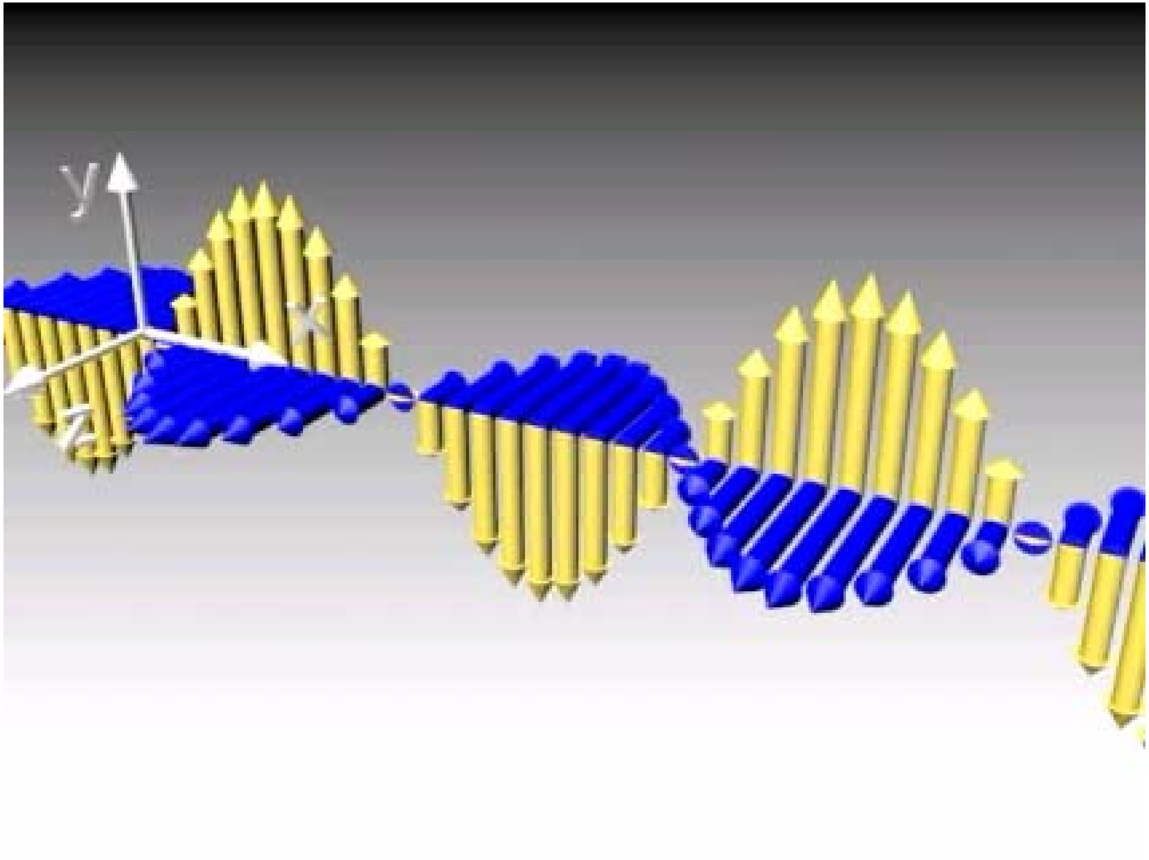
$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{：波数} \qquad \omega=2\pi f \quad \text{：角周波数}$$

（λ：波長、 f：周波数）

対応する磁場の解は

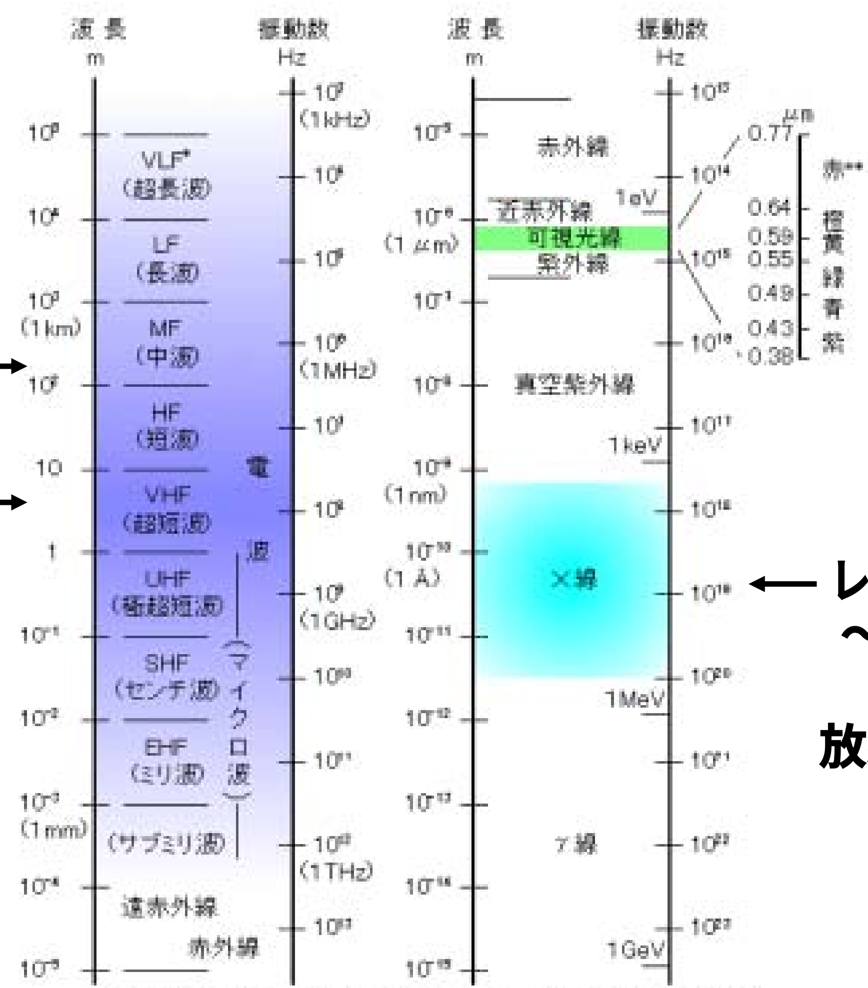
$$B_z(x,t)=B\cos(kx-\omega t) \quad \text{ただし} \quad B=E/c$$

＋x方向に進行する電磁波



http://web.mit.edu/8.02t/www/

表1　電磁波の波長と振動数



＊：電波の周波数帯の英字による呼び方は国際電気通信条約無線規則による。
＊＊：可視光線の限界ならびに色の境界には個人差がある。

［出典］国立天文台(編): 理科年表 平成10年版, 丸善株式会社, (1997年11月29日) p.501

可視光線
400 nm〜800 nm

AM**ラジオ**

FM**ラジオ**

電子レンジ
無線LAN
衛星放送

レントゲン
〜0.1 nm

放射線

遠赤外線ヒーター

医療用レーザー
10.6 **μ**m

この講義の目標①

電磁気学の基本法則の理解

時間変化しない電磁場 (静電場、静磁場)

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right)$$ (ローレンツ力)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}dV' \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho(\boldsymbol{r})dV & \text{(電場のガウスの法則)} \\ \oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0 & \text{(循環ゼロの法則)} \end{cases}$$

（クーロンの法則）

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}dV' \Leftrightarrow \begin{cases} \oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} & \text{(アンペールの法則)} \\ \int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0 & \text{(磁場のガウスの法則)} \end{cases}$$

（ビオーサバールの法則）

時間変化する電磁場

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right)$$

$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho(\boldsymbol{r})dV$$

$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \underline{-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}}$$

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) + \underline{\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t}}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

これらの基本法則は、その意味も含めて、すべて覚えましょう

この講義の目標②

電磁現象の定性的理解

- 車の中は落雷に対して安全である（静電遮蔽）

- ウランが核分裂で放出されるエネルギーは原子核の静電エネルギー
  （原子力エネルギーはウランの場合、実は電気エネルギー）

- 磁気力とは、クーロン力と相対論的効果の現れである
  （磁気力は座標系によってはクーロン力とみなせる）

- 光は電磁場である

みんな理解できましたか？