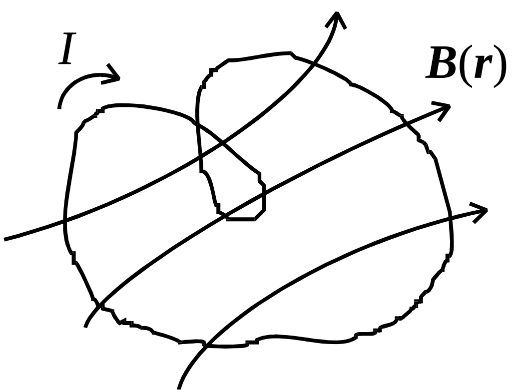
# 電流回路の自己インダクタンス




電流回路が自分自身で生成する磁場（磁束）の変化も、その回路に誘導起電力を生じさせる（自己誘導）

電流回路が生成する磁場$B(\boldsymbol{r})$は、ビオ・サバールの法則より、回路に流れる電流$I$に比例するので、回路を貫く磁束Φも、電流$I$に比例する：

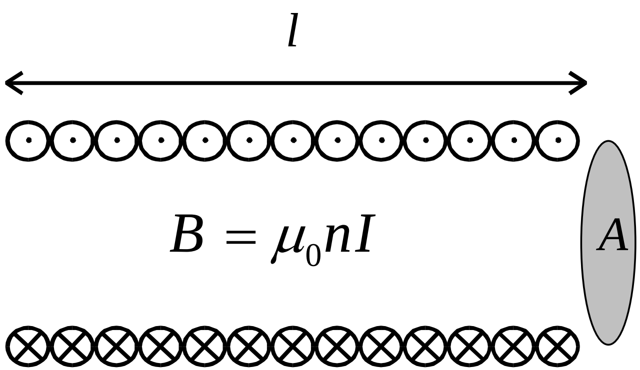
$$\Phi = LI$$

よって、回路に生じる誘導起電力は

$$V = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -L\frac{dI}{dt}$$

（$L$：自己インダクタンス。単位はWb/A=H（ヘンリー））

# ソレノイドコイルの自己インダクタンス
## (第4章レポート問題1)




単位長さあたりの巻き数：$n$

コイル一巻を貫く磁束Φは、

$$\Phi = AB = \mu_0 AnI$$

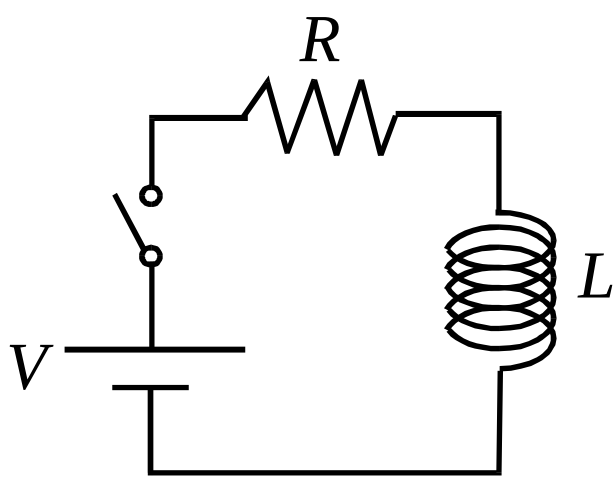
巻き数は$nl$なので、誘導起電力は、

$$V = -nl\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mu_0 An^2 l\frac{dI}{dt}$$

よって、ソレノイドコイルのインダクタンスは

$$L = \mu_0 n^2 Al = \mu_0 n^2 \times (\text{体積})$$

# コイルに流れる電流の時間変化




時刻 $t = 0$ にスイッチを入れる。

キルヒホッフの法則より

$$V - RI(t) - L\frac{dI(t)}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t) = \frac{V}{L}$$

同次方程式 $\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t) = 0$ の解は

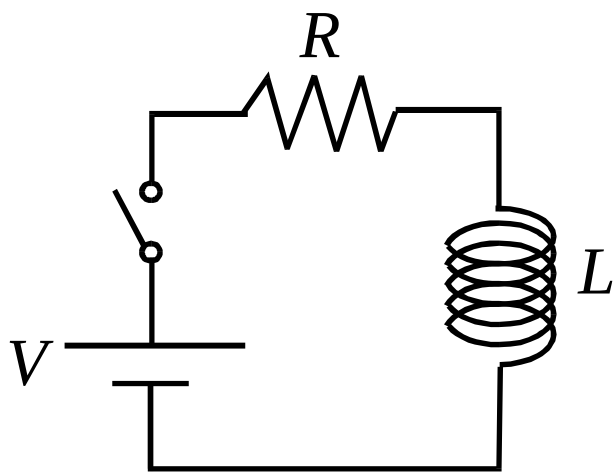
$$I'(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

また、特解は $I_p(t) = V/R$ なので、一般解は

$$I(t) = I'(t) + I_p = Ae^{-\frac{R}{L}t} + V/R$$

初期条件 $I(0) = 0$ より、$I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

# コイルに蓄えられたエネルギー




コイルに流れる電流は、$I(t)=\dfrac{V}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$

コイルに生ずる誘導起電力は

$$V_C(t)=L\frac{dI(t)}{dt}=Ve^{-\frac{L}{R}t}$$

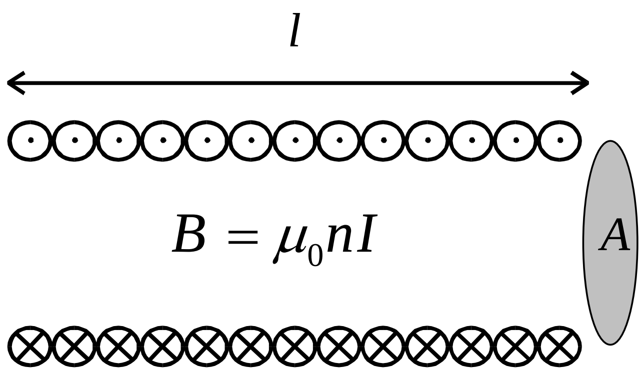
したがって、コイルに蓄えられたエネルギーは

$$U=\int_0^\infty V_C(t)I(t)dt=\frac{V^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{R}{L}t}(1-e^{-\frac{R}{L}t})dt$$

$$=\frac{V^2}{R}\left[-\frac{L}{R}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{L}{2R}e^{-\frac{2R}{L}t}\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{2}L\frac{V^2}{R^2}=\frac{1}{2}LI^2\left(I\equiv I(\infty)=\frac{V}{R}\right)$$

# 磁場のエネルギー密度




単位長さあたりの巻き数：$n$

ソレノイドコイルのインダクタンスは

$$L = \mu_0 n^2 A l = \mu_0 n^2 \times (\text{体積})$$

コイルに流れる電流は $I = \dfrac{B}{\mu_0 n}$

よって、コイルに蓄えられたエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 \left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 \times (\text{体積})$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\mu_0^{-1} B^2} \times (\text{体積})$$

磁場のエネルギー密度と解釈できる

# 電場と磁場のエネルギー（まとめ）

## 電場のエネルギー密度

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

## コンデンサーに蓄えられたエネルギー

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

## 磁場のエネルギー密度

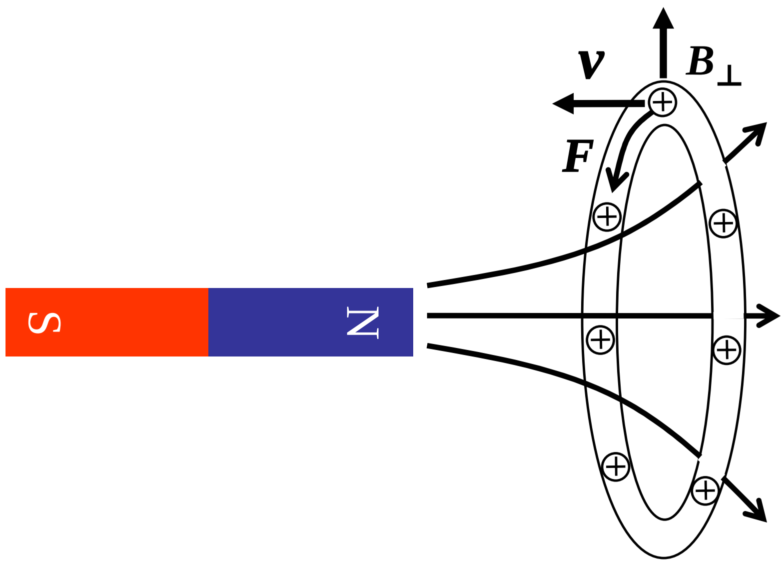
$$u = \frac{1}{2}\mu_0^{-1}B^2$$

## コイルに蓄えられたエネルギー

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\Phi I$$

# 誘導起電力の起源①

## コイルが磁石に対して動く場合




ローレンツ力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$
をコイル内の電荷が受けて
電流が流れる。

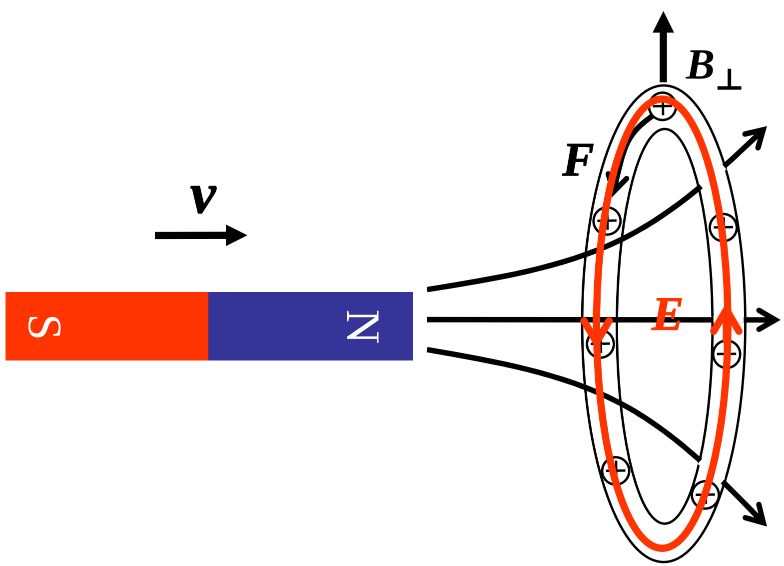
誘導起電力$V$は、

$$V = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$$

$$= -\int_S \frac{d\boldsymbol{B}}{dt} \cdot d\boldsymbol{S}$$

# 誘導起電力の起源②

## 磁石がコイルに対して動く場合




コイル内の電荷は静止しているので、磁場からのローレンツ力は働かない。しかし、電荷には力が働き電流が流れる

↓

力（誘導起電力）の起源は電場にあると考えざるを得ない。その電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を誘導電場と呼び、これは

$$V = \oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_S \frac{d\boldsymbol{B}}{dt} \cdot d\boldsymbol{S}$$

を満たしていなければならない。

# 電場の循環 (電磁誘導の法則)

磁場の時間変化が作る電場 (誘導電場) $E(r)$は、電磁誘導の法則を満たす。

$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_S \frac{d\boldsymbol{B}}{dt} \cdot d\boldsymbol{S}$$

磁場の時間変化がない場合、電荷が作る電場 (クーロン電場) が満たすべき循環ゼロの法則に自然に帰着する

$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \quad \text{(クーロン電場の場合)}$$

したがって、電磁誘導の法則は、電場が一般的に満たしている基本法則である。

# マクスウェル方程式（まだ不完全）

## 時間変化する電磁場の基本方程式

$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho(\boldsymbol{r}) dV$$

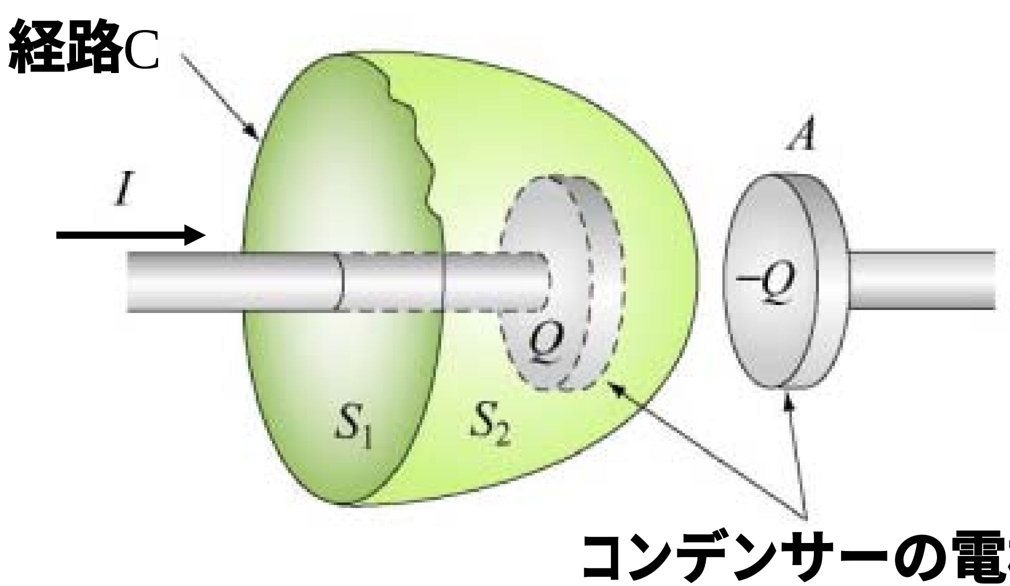
$$\int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \underline{-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}}$$

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$$ ←ここが不完全

$$\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

# アンペールの法則の問題点

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$




曲面$S_1$をとれば

$$\mu_0 \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \mu_0 I$$

曲面$S_2$をとれば

$$\mu_0 \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

曲面の選びかたによって、右辺の値が異なる！

# マックスウェルによる修正

あるベクトル場$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$において、

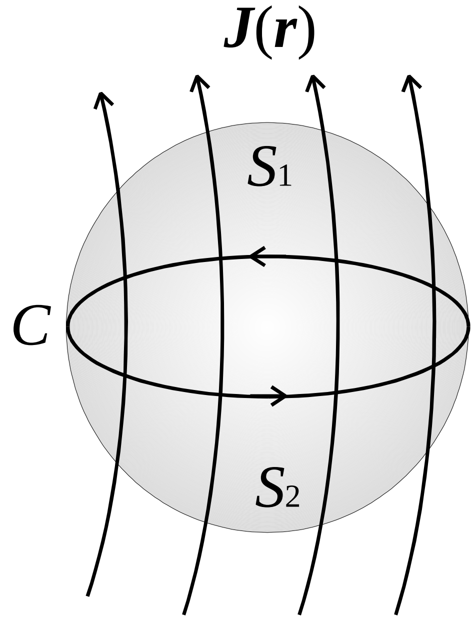
$$\int_S \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$

の値が経路Cを縁とする曲面Sの選びかたに依らないならば、

$$\int_{S_1} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_2} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$

であるので、

$$\int_{S_1} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} - \int_{S_2} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\text{閉曲面}S} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$




つまり、任意の閉曲面Sにおける$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$の湧き出しはゼロでなければならない

# マックスウェルによる修正（つづき）

残念ながら電流密度$j(r)$の湧き出しは一般にゼロにならない（先のコンデンサーの場合が良い例）。しかし、電流密度$j(r)$に関しては、電荷の保存則が成り立っている

$$\int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = -\int_V \frac{\partial \rho(\boldsymbol{r})}{\partial t} dV$$

この式を移項してみると、

$$\int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} + \int_V \frac{\partial \rho(\boldsymbol{r})}{\partial t} dV = 0$$

さらにガウスの法則 $\int_V \rho(\boldsymbol{r}) dV = \varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$ を利用すると

$$\int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} + \int_V \frac{\partial \rho(\boldsymbol{r})}{\partial t} dV = \int_S \left( \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

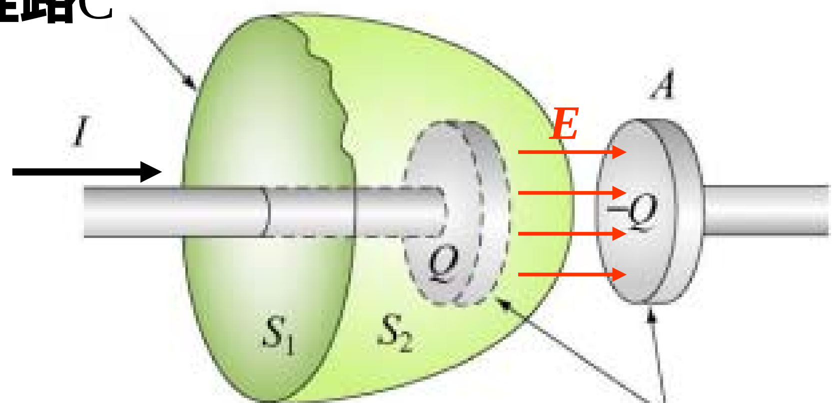
湧き出しゼロのベクトル場！

# 修正されたアンペールの法則

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \left( \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t} \right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

$\varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t}$ :**変位電流** (displacement current)

**経路**C




**コンデンサーの電極**

# マクスウェル方程式 (完全版)

## 時間変化する電磁場の基本方程式

$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho(\boldsymbol{r}) dV$$

$$\int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \underline{-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}}$$

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \left( \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \underline{+ \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t}} \right) \cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

# マクスウェル方程式の微分形

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \left( \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$$

# 真空中のマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t} \qquad \left( c \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \right)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$$

# 波動方程式の導出

$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t}$の両辺に左から∇をかけると

左辺：$\nabla \times \left(\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right) - \left(\nabla \cdot \nabla\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\Delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

右辺：$-\nabla \times \dfrac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t}\right)$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t^2}$$

ゆえに、$\Delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t^2}$