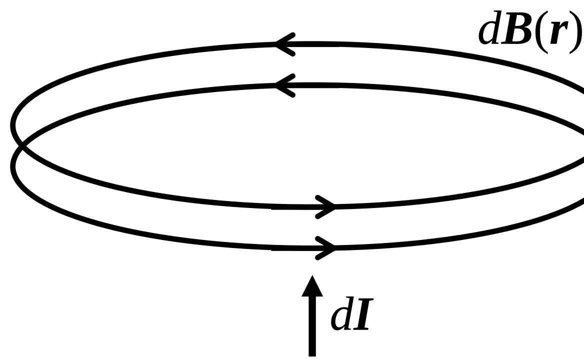
磁場の湧き出し

ビオ･サバールの法則より、電流要素dIは回転対称な（トーラス型の）磁場を作る



どのような閉曲面Sをとっても、$\int_S d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0$

磁場の重ね合わせの原理より、一般に $\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0$

これまでのまとめ

時間変化しない電磁場（静電場、静磁場）の基本法則

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=q\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right)$$ （ローレンツ力）

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}dV' \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_0\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V\rho(\boldsymbol{r})dV & \text{(電場のガウスの法則)} \\ \oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=0 & \text{（循環ゼロの法則）} \\ \text{境界条件（無限遠で電場がゼロに収束）} & \end{cases}$$

（クーロンの法則）

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}dV' \Leftrightarrow \begin{cases} \oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\mu_0\int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} & \text{（アンペールの法則）} \\ \int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=0 & \text{（磁場のガウスの法則）} \\ \text{境界条件（無限遠で磁場がゼロに収束）} & \end{cases}$$

（ビオーサバールの法則）

微分系への準備
その①：ガウスの定理

$$\int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) dV$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{\partial v_x(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \frac{\partial v_y(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \frac{\partial v_z(\boldsymbol{r})}{\partial z} \left(\equiv \mathrm{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \right)$$

「$\nabla \cdot$」または「div」は「ダイバージェンス(divergence)」と読む

微分系への準備
その②：ストークスの定理

$$\oint_C \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \left(\nabla\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \equiv \left(\frac{\partial v_z(\boldsymbol{r})}{\partial y}-\frac{\partial v_y(\boldsymbol{r})}{\partial z},\frac{\partial v_x(\boldsymbol{r})}{\partial z}-\frac{\partial v_z(\boldsymbol{r})}{\partial x},\frac{\partial v_y(\boldsymbol{r})}{\partial x}-\frac{\partial v_x(\boldsymbol{r})}{\partial y}\right)$$

$$\left(\equiv \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\right)$$

「∇×」または「rot」は「ローテーション（rotation）」と読む

ガウスの法則の微分系

ガウスの定理（数学）

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) dV$$

ガウスの法則（物理）

$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) dV = \int_V \rho(\boldsymbol{r}) dV$$

任意の体積Vで上の式が成り立つためには、積分の中身は同じでなければならないので、

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$$

アンペールの法則の微分系

ストークスの定理 (数学)

$$\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_V \left(\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

アンペールの法則 (物理)

$$\int_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \left(\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right)\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$

任意の閉曲面Sで上の式が成り立つためには、積分の中身は同じでなければならないので、

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$$

静電磁場の基本法則

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right)$$

＜微分形＞

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$$

＜積分形＞

$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho(\boldsymbol{r}) dV$$

$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

$$\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

マクスウェル方程式

時間変化する電磁場の基本方程式

$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho(\boldsymbol{r}) dV$$

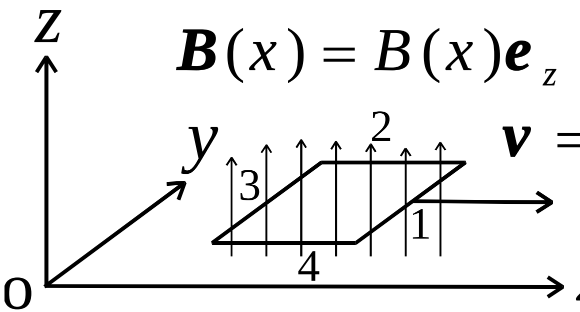
$$\int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \underline{-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}}$$

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) + \underline{\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{\partial t}} \right) \cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

第４章
時間変化する電磁場

電磁誘導



$$\boldsymbol{B}(x) = B(x)\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$$

回路を一周する向きは、磁場の方向（今はz軸）に対して右ねじの向きと約束する。

導体内の電荷qが受けるローレンツ力は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(x) = qvB(x)\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z \\ &= -qvB(x)\boldsymbol{e}_y\end{aligned}$$

単位電荷が一辺の長さがaの回路を一周する際に受ける仕事W、を考える。

$$dW_1 = \int_{辺1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -vB(x_1)a$$

$$dW_2 = 0$$

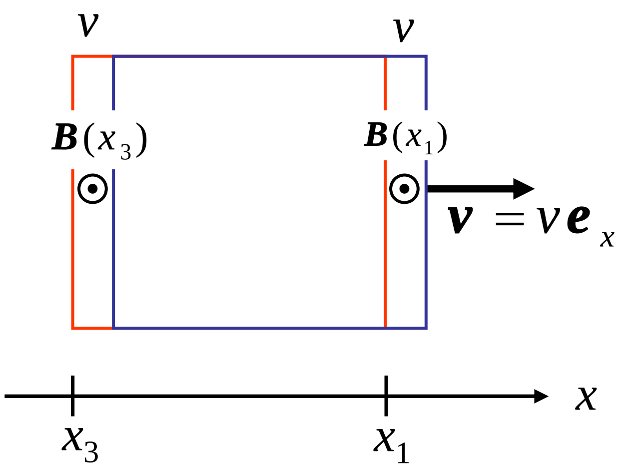
$$dW_3 = vB(x_3)a$$

$$dW_2 = 0$$

よって、この回路に生じる誘導起電力Vは、

$$V = dW_1 + dW_3 = -va\big(B(x_1) - B(x_3)\big)$$

誘導起電力



この回路を右ねじの向きに貫く磁束

$$\Phi \equiv \int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

単位時間あたりの変化量は、

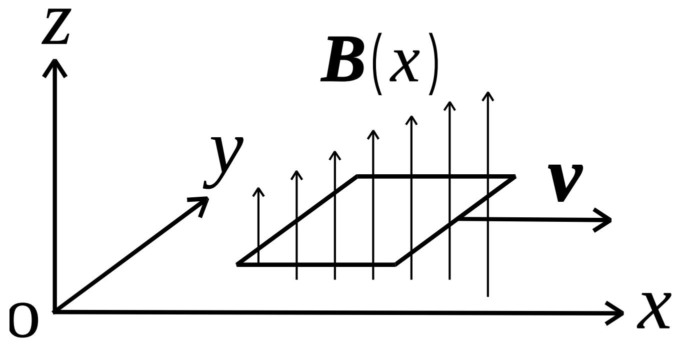
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = vaB(x_1) - vaB(x_3) = va\left(B(x_1) - B(x_3)\right)$$

よって、この回路に生じる誘導起電力は、

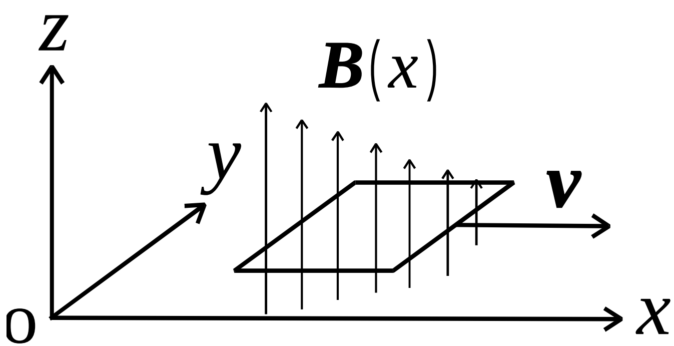
$$V = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

と表せる。

誘導起電力の向き（レンツの法則）



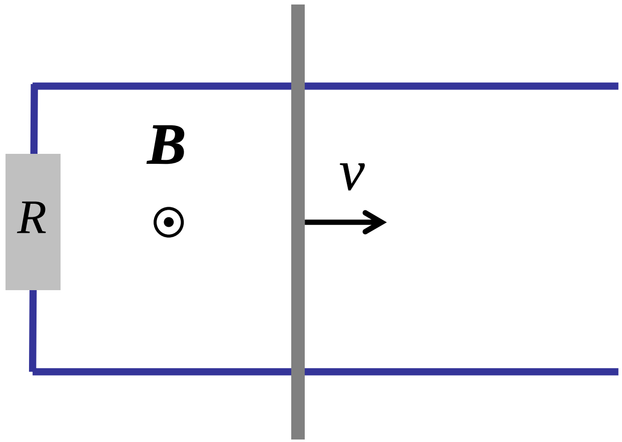
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} > 0 \rightarrow V < 0 \rightarrow$$ 電流は磁場に対して右ねじの向きと逆に流れる



$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} < 0 \rightarrow V > 0 \rightarrow$$ 電流は磁場に対して右ねじの向きに流れる

誘導起電力は、回路を貫く磁束の変化を打ち消す向きに生じる（レンツの法則）

誘導起電力が行う仕事の起源



単位時間あたりの回路を貫く磁束の変化量は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = vaB = V\ (誘導起電力)$$

回路に流れる電流Iは

$$I = \frac{V}{R} = \frac{vaB}{R}$$

棒に働くローレンツ力は、

$$F = aBI = aB \cdot \frac{vaB}{R} = \frac{va^2B^2}{R}$$

よって、抵抗で消費される電力Pは

$$P = VI = \frac{(vaB)^2}{R}$$

よって、棒をローレンツ力に抗して
速さvで動かすために必要なパワーは、

$$P = Fv = \frac{(vaB)^2}{R}$$