電流が作る磁場

$$\boldsymbol{B}(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{I}{r}\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_r$$

ここで定数 $\mu_0 \equiv \dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ を導入すると、

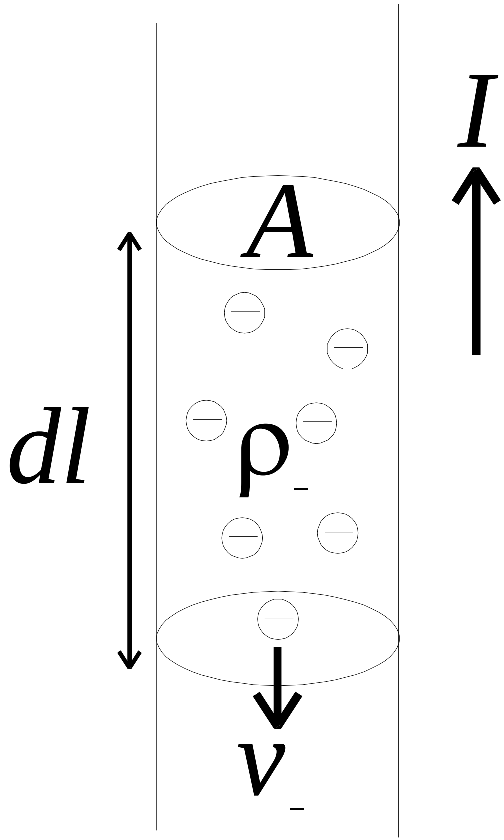
$$\boldsymbol{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_r$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$：真空の透磁率（定義値）

$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2} = 8.8541878 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$：真空の誘電率（定義値）

（真空中の光速：c = 299,792,458 m/s（定義値））

電流に働くローレンツ力



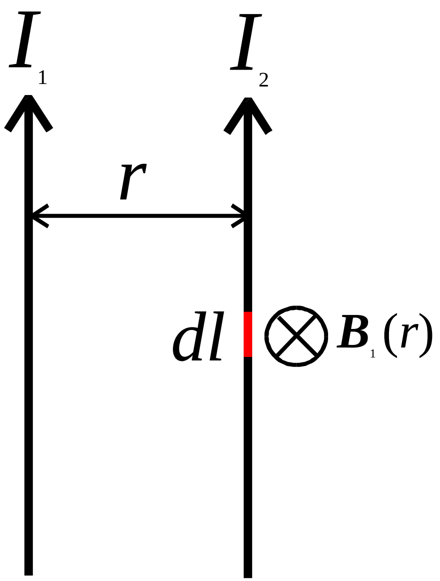
$$\boldsymbol{v}_- = \frac{\boldsymbol{j}}{\rho_-} = \frac{I}{\rho_- A}\boldsymbol{e}_I$$

$$dQ = \rho_- A dl$$

$$d\boldsymbol{F} = dQ\,\boldsymbol{v}_- \times \boldsymbol{B} = \rho_- A dl \frac{I}{\rho_- A}\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{B}$$

$$= \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B} dl \qquad \left(\boldsymbol{I} = I\boldsymbol{e}_I\right)$$

電流間に働く力



$$\boldsymbol{B}_1(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{r}\boldsymbol{e}_{I_1} \times \boldsymbol{e}_r$$

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{I}_2 \times \boldsymbol{B}_1 dl \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r}\boldsymbol{e}_{I_2} \times \left(\boldsymbol{e}_{I_1} \times \boldsymbol{e}_r\right) dl \\ &= -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r}\left(\boldsymbol{e}_{I_1} \cdot \boldsymbol{e}_{I_2}\right)\boldsymbol{e}_r dl \end{aligned}$$

電流が同じ（逆）向きなら、引力（斥力）

$$I_1 = I_2 = 1\,\mathrm{A},\ r = dl = 1\,\mathrm{m}$$

$$\left|d\boldsymbol{F}\right| = \frac{\mu_0}{2\pi} = 2\times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$ **（電流の定義）**

電場と磁場の法則のアナロジー

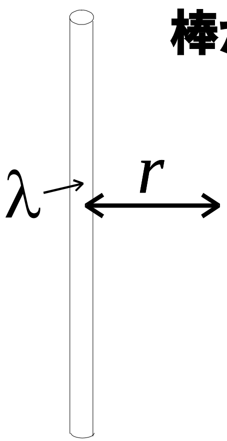
クーロンの法則

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}\,dl$$

ビオ･サバールの法則

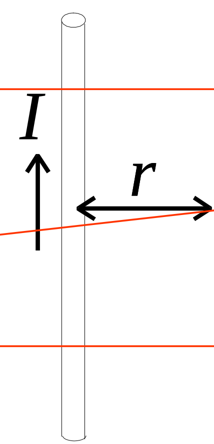
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}\,dl$$

線電荷密度λの無限に長い棒が作る電場



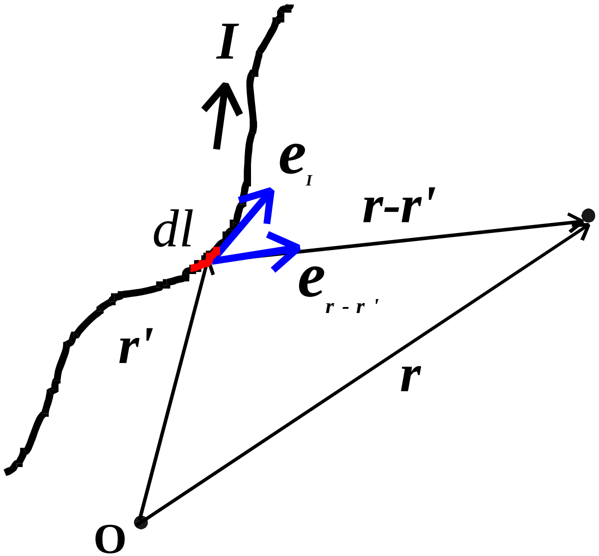
$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\boxed{\boldsymbol{e}_r}$$

電流Iの無限に長い導線が作る電場



$$\boldsymbol{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\boxed{\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_r}$$

ビオ･サバールの法則



$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}dl$$

$d\boldsymbol{I} \equiv I\boldsymbol{e}_I dl$ と定義すれば、

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{d\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}$$

連続的な電流分布への拡張

クーロンの法則

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}dl$$

$$\lambda dl \leftrightarrow \rho(\boldsymbol{r}')dV'$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}dV'$$

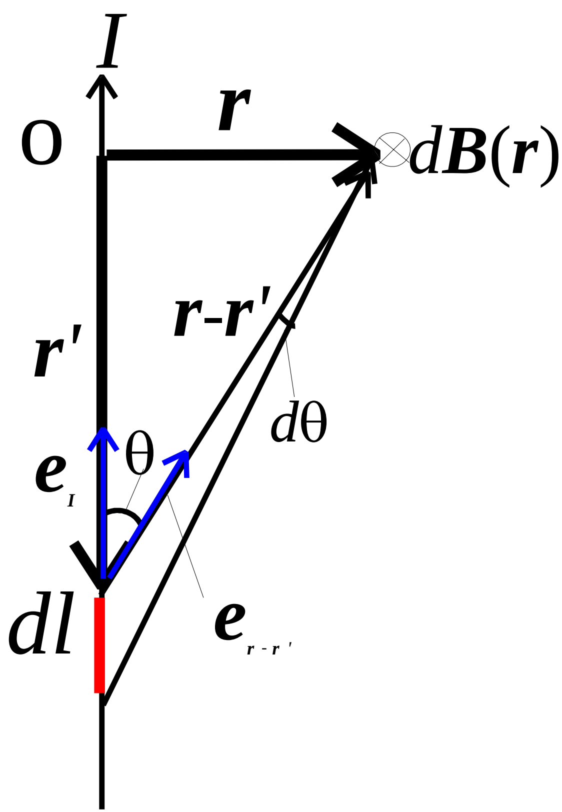
ビオ･サバールの法則

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}dl$$

$$I\boldsymbol{e}_I dl \leftrightarrow \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')dV'$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}dV'$$

無限に長い直線電流の作る磁場



$$dB(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2} dl$$

$$\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'} = \boldsymbol{e}_\varphi \sin\theta \qquad \left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right| \equiv R$$

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin\theta dl}{R^2} \boldsymbol{e}_\varphi$$

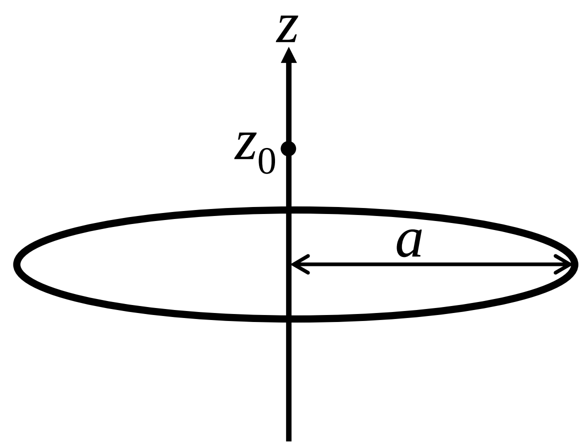
$$\sin\theta dl = R d\theta \qquad \sin\theta = r/R$$

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{r} \boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{r} \boldsymbol{e}_\varphi d\theta = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \boldsymbol{e}_\varphi$$

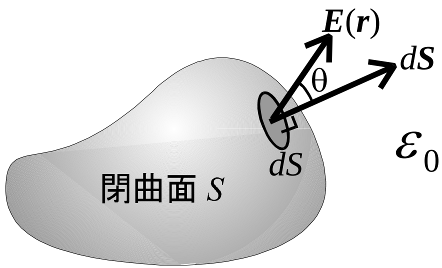
第3章レポート問題1

半径aの円形回路に、電流Iが流れている。円の中心における磁場の大きさをビオーサバールの法則を用いて計算せよ。
余裕のあるものは、この円形回路の中心軸(z軸)上の任意の位置$z = z_0$における磁場の大きさを求めよ。



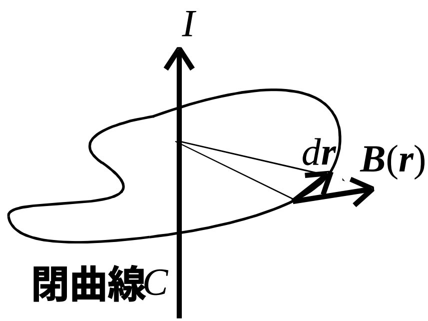
ガウスの法則とアンペールの法則

ガウスの法則



$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \begin{cases} 0 & \text{（電荷}q\text{が閉曲面}S\text{の外部にある場合）} \\ q & \text{（電荷}q\text{が閉曲面}S\text{の内部にある場合）} \end{cases}$$

アンペールの法則



$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \begin{cases} 0 & \text{（閉曲線}C\text{が電流}I\text{を絡まない場合）} \\ \mu_0 I & \text{（閉曲線}C\text{が電流}I\text{を絡む場合）} \end{cases}$$