第３章
静磁場

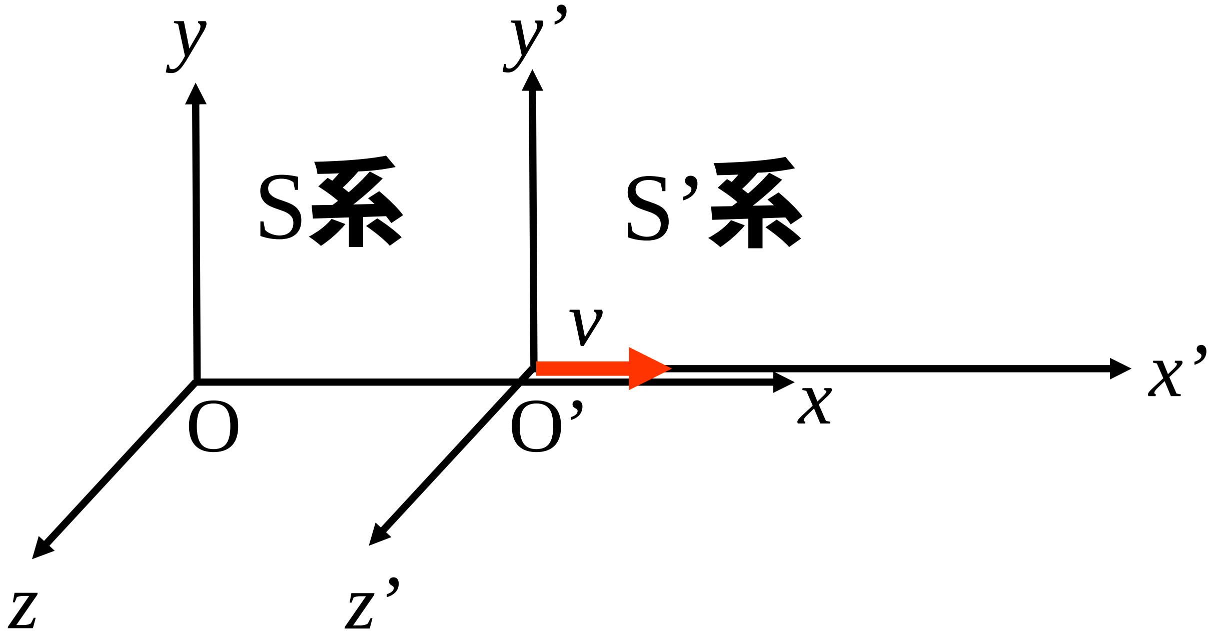
ローレンツ力（復習）

速度vで運動している電荷qが位置rで受ける力は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}))$$

と表せることが経験的にわかっている。この電荷に働く力を
ローレンツ力と呼び、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$を**電場**、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を**磁場**と定義する。

二つの慣性系



S'系はS系に対してx軸正の方向に速さvで移動している

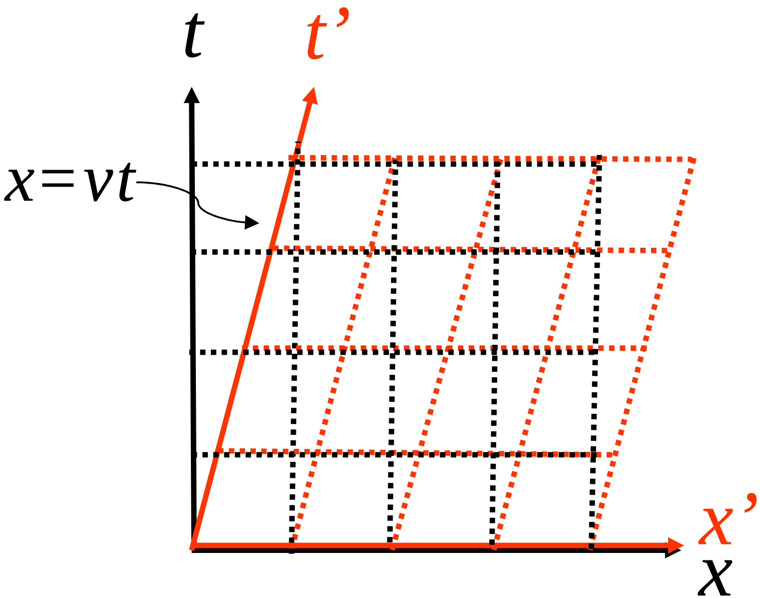
問題提起

- S系において時刻t、位置xで起きた事象は、S’系においていつ(x')どこで(t')観測されるのだろうか？

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

(x, t) から (x', t') への写像（一次変換行列）の具体形が知りたい。

我々の常識(ガリレイ変換)



S系とS’系には同じ時間が流れている ⇨ $t' = t$

S系における $x=vt$ の線が、S’系における $x'=0$ の線 ⇨ $x' = x - vt$

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

ガリレイ変換

ガリレイ変換の破綻

S系では時刻 $t = 0$ に位置 $x = 0$より発せられた光は、
1秒後($t = 1$)に位置 $x = c$ に到達する。

この現象をS’系でみると、

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-v \\ 1 \end{pmatrix}$$

S’系では1秒後($t' = 1$)に位置 $x' = c\text{-}v$ に到達する。
従って、S’系での光速は$\underline{c\text{-}v}$ 。

→地球上の光速は光の進行方向に依存しないという
マイケルソン-モーレーの実験 (1887年) と矛盾！

特殊相対性理論
(A. Einstein,1905)

＜二つの基本原理＞

- 物理法則はすべての慣性系に対して同じ形で表される (相対性原理)

- 真空中の光の速さは光源の運動状態に無関係である (光速不変の原理)

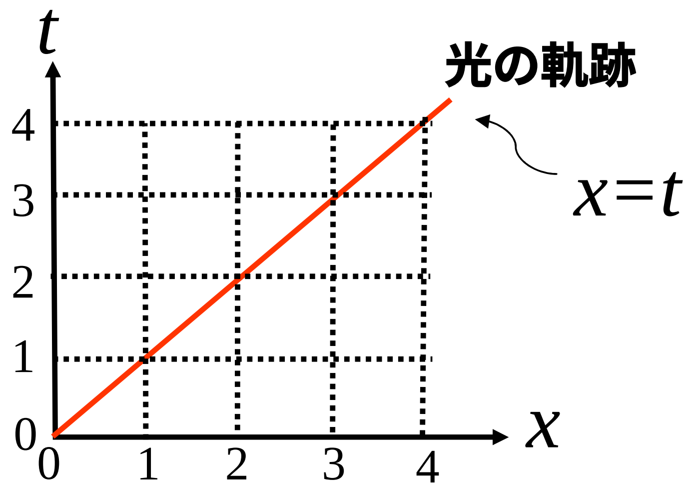
我々 (Einstein) の目標

相対性原理と**光速不変の原理**を同時に満たすような、S系とS’系間の時空座標の一次変換行列を新たに求める。

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

準備：時間の単位の再定義

後の議論を簡単にするため、1/c秒を、あらためて1秒と定義し、光は1秒間に1m進むものとする。（光速を1m/秒とする）



注）元の単位に戻るには、$t \to ct,\ v \to \dfrac{v}{c}$ と置き換えればよい

条件　その１ (光速不変の原理)

S系では時刻 $t=0$ **に位置** $x=0$ **より発せられた光は、１秒後(**$t=1$**)に位置** $x=1$ **に到達する。この現象をS'系で観測すると、**

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$$

S**’系での光速も１であるから**

$$\frac{x'}{t'} = \frac{a+b}{c+d} = 1$$

$$\therefore a+b = c+d \cdots ①$$

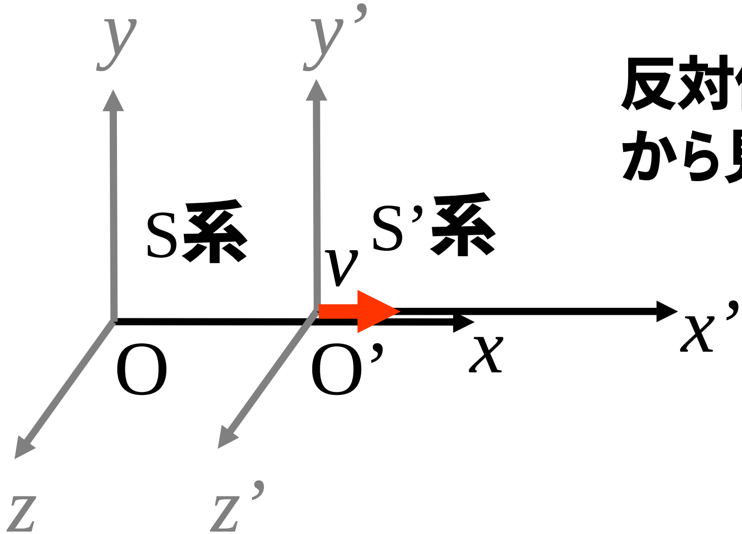
条件　その2（相対速度）

S’系の原点（$x' = 0$）は、S系から見て速度vで動いている。したがって、S系の時空座標$(x,\ t) = (v,\ 1)$のS’系におけるx'座標は0である（t'座標は不明）

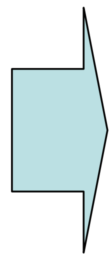
$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ? \end{pmatrix}$$

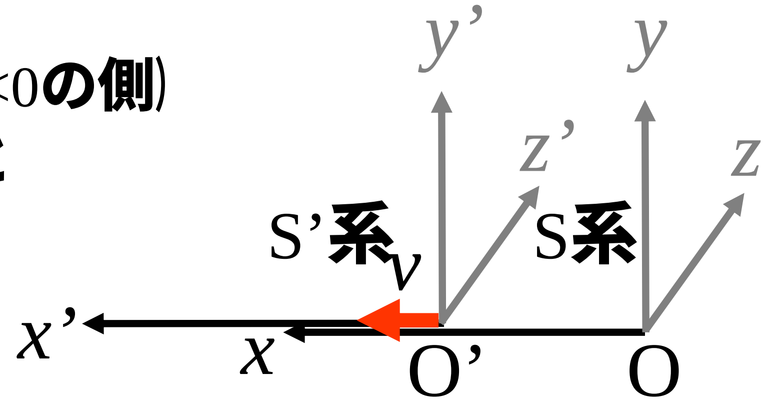
$$\therefore av + b = 0 \cdots ②$$

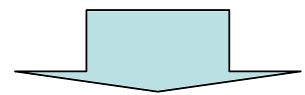
見方を変える



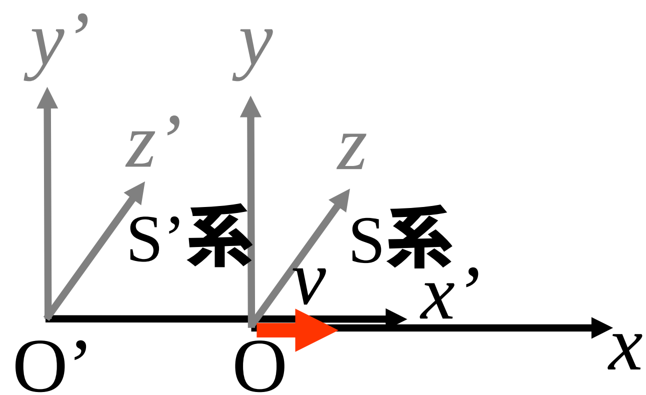
反対側 (z<0の側)
から見ると







更にx, x'軸の正の向きを逆に
定義すると



x, x'軸の正の向きを逆に
定義すると、S系とS'系
の立場が入れ替わる！

条件　その3（相対性原理）

S’系がS系に対してx軸正の方向に速度vで移動している状況は、（x, x’軸の正の向きを逆に定義すれば）S系がS’系に対してx’軸正の方向に速度vで移動しているとみなすこともできる。どちらの見方でも、相対性原理により、物理法則（つまり一次変換行列）は同じはずである。

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{x \to -x \\ x' \to -x'}} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

同じ

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

ここでx, x'**軸の正の向きを逆に定義すると**

$$\begin{pmatrix} -x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x' \\ t' \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

③

以上、まとめると、

$$a+b=c+d\cdots①$$ （光速不変の原理）

$$av+b=0\cdots②$$ （相対速度で決まる条件）

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdots③$$ （相対性原理）

①、②、③より

$$a=d=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}},\quad b=c=-\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

現実 (SI単位系) に戻ろう。

$$t \to ct, \quad v \to \frac{v}{c}, \quad t' \to ct', \quad v' \to \frac{v'}{c}$$ の置き換えをすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

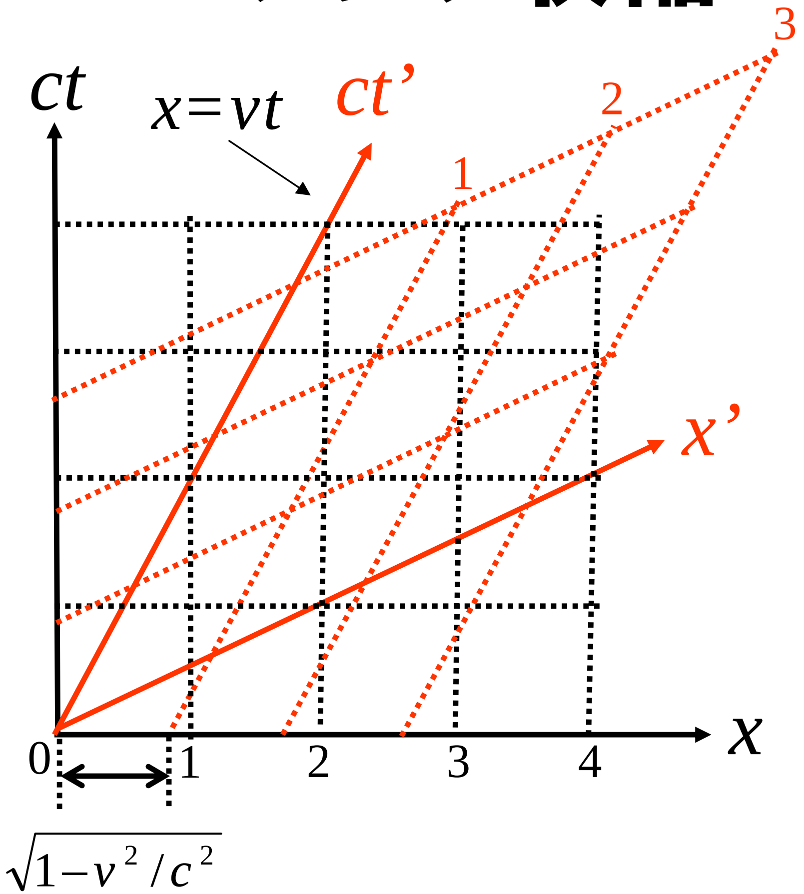
$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned}}$$

ローレンツ変換

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned}}$$

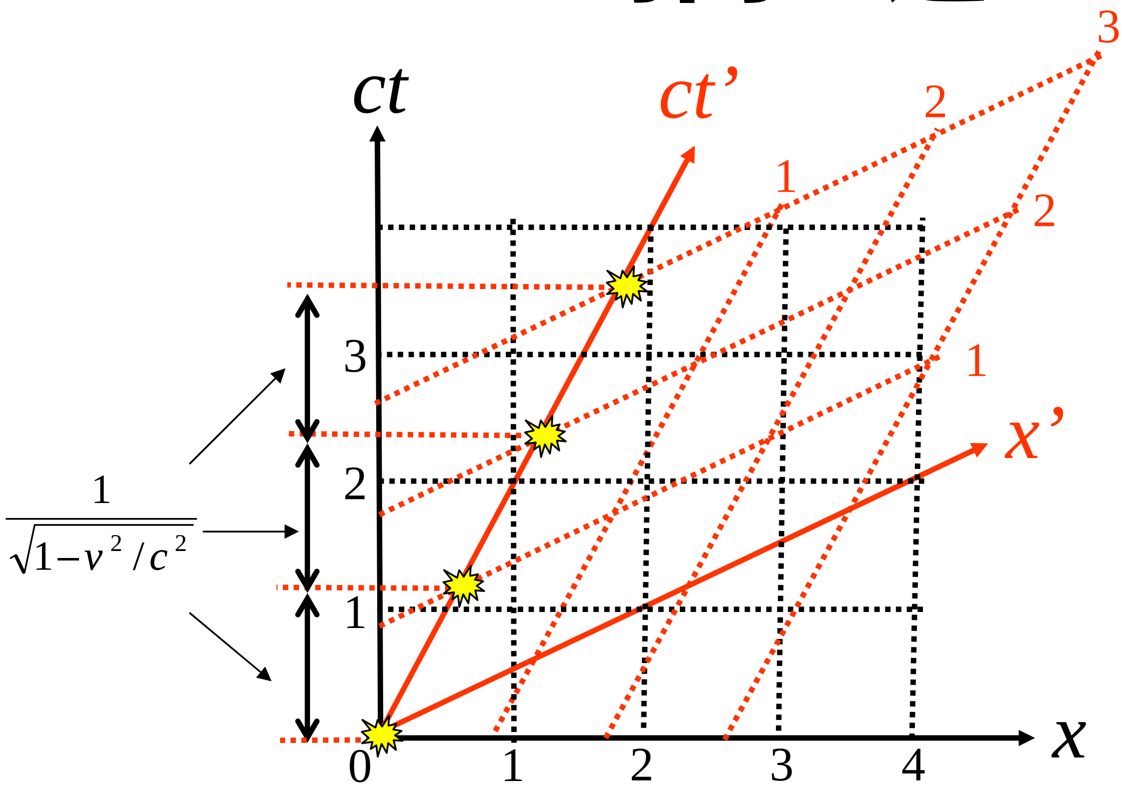
ローレンツ逆変換

ローレンツ収縮



S'系で長さLの物体は、S系では長さが$L\sqrt{1-v^2/c^2}\,(<L)$ に見える

時間の遅れ



S'系で $x'=0$ にあるフラッシュランプは、S'系の時計では1秒おきに点灯。

S系の時計では

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(>1)$$

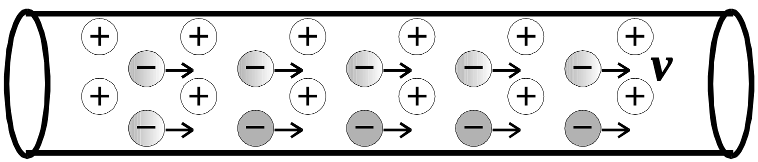
秒おきに点灯。

S'系の時間は、S系からみると $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(>1)$ 倍遅く流れているように見える

力の起源：電場or磁場？

$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$

$\boldsymbol{B} \otimes \quad q \rightarrow \boldsymbol{v}$

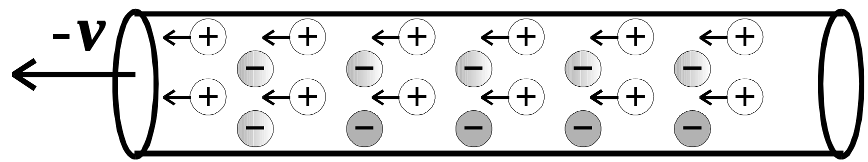


S系 $I \longleftarrow$

$\rho = \rho_{+} + \rho_{-} = 0$

$\boldsymbol{F}' = ?$

$\boldsymbol{B} \otimes \quad q$



S'系 $I \longleftarrow$

$\rho' = \rho'_{+} + \rho'_{-} = ?$

ローレンツ収縮による導線の帯電

S系では、自由電子は速度vで動いているので、自由電子の平均的間隔は止まっている場合（S’系）の間隔の$\sqrt{1-v^2/c^2}$倍にローレンツ収縮している

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Leftrightarrow \rho'_- = \rho_- \sqrt{1-v^2/c^2} \cong \rho_- \left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right)$$

S’系では、原子核は速度vで動いているので、原子核の平均的間隔は止まっている場合（S系）の間隔の$\sqrt{1-v^2/c^2}$倍にローレンツ収縮している

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cong \rho_+ \left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)$$

従って、

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- \cong \rho_+ \left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right) + \rho_- \left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right) = \rho_+ \frac{v^2}{c^2}$$

S系において、電荷qに働く力は、狭義のローレンツ力

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = -qv\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{B}$$

S'系において、電荷qに働く力は、クーロン力

$$\boldsymbol{F}' = q\boldsymbol{E}' = \frac{q\rho' A}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e}_r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\rho_+ vA}{r}v\,\boldsymbol{e}_r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{I}{r}v\,\boldsymbol{e}_r$$

両者は同じであろうから（電荷はどちらの系でも上向きに加速されるから）、

$$-qv\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{B} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{I}{r}v\,\boldsymbol{e}_r$$

$\boldsymbol{B} \perp \boldsymbol{e}_I$ と仮定すると

$$\boldsymbol{B}(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{I}{r}\boldsymbol{e}_I \times \boldsymbol{e}_r$$

近似を用いない厳密な議論は
ファインマン物理学III「電磁気学」
p166（電磁場の相対性）を参照のこと