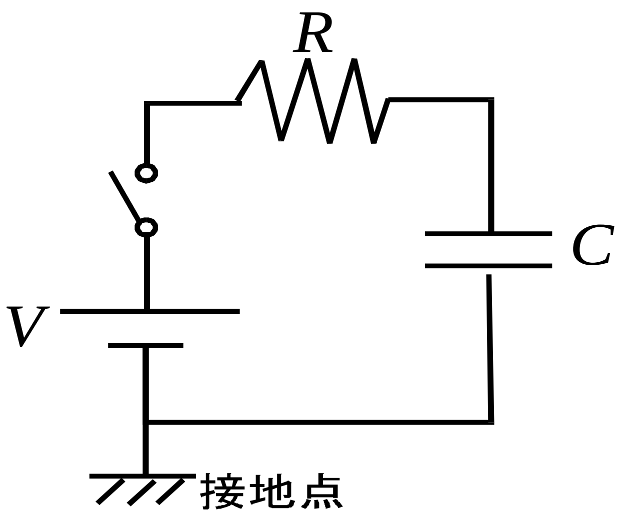
コンデンサーの充電



時刻 $t=0$ にスイッチを入れる。

キルヒホッフの法則より

$$V - RI(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

電流と電荷の関係 $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ より、

$$\frac{dQ(t)}{dt} - \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{V}{R}$$

同次方程式 $\frac{dQ'(t)}{dt} - \frac{1}{RC}Q'(t) = 0$ の解は

$$Q'(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

また、特解は $Q_p(t) = CV$ なので、一般解は

$$Q(t) = Q'(t) + Q_p = Ae^{-\frac{t}{RC}} + CV$$

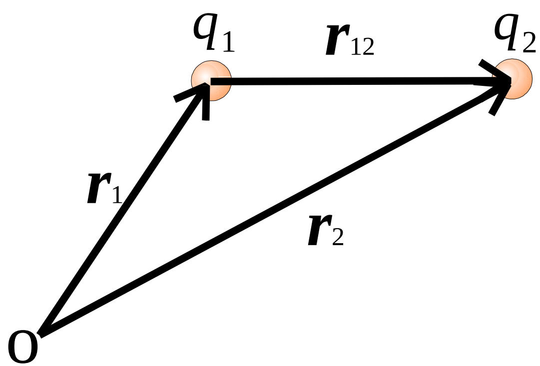
初期条件 $Q(0) = 0$ より、$Q(t) = CV(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

第1章レポート問題4

②電荷Q_0が帯電した静電容量Cのコンデンサーを時刻t=0に抵抗Rを介して放電する。後の時刻tにおけるコンデンサーの電荷量$Q(t)$を求め、グラフ化せよ。

静電エネルギー

ある電荷分布を作り上げるのに必要なエネルギーを、その電荷分布の静電エネルギーと呼ぶ。



＜二個の点電荷の場合＞

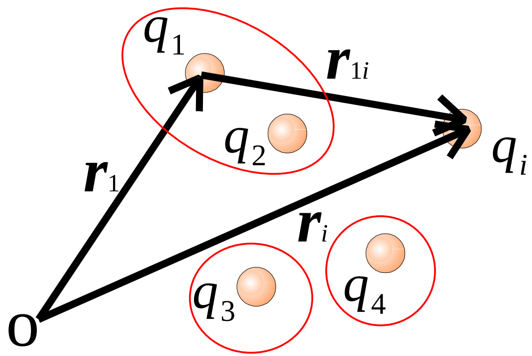
電荷q_1を位置r_1に置く→エネルギーはいらない

電荷q_2を位置r_2に置く

→ $$U = q_2 \phi_1(\boldsymbol{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

静電エネルギー

＜複数の点電荷の場合＞



$$
\begin{aligned}
U &= q_2\phi_1(\boldsymbol{r}_2) \\
&\quad + q_3\left(\phi_1(\boldsymbol{r}_3) + \phi_2(\boldsymbol{r}_3)\right) \\
&\quad + q_4\left(\phi_1(\boldsymbol{r}_4) + \phi_2(\boldsymbol{r}_4) + \phi_3(\boldsymbol{r}_4)\right) \\
&\quad + \cdots \\
&= \sum_{i>j} q_i \phi_j(\boldsymbol{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i>j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}
\end{aligned}
$$

$$\sum_{i>j} q_i \phi_j(\boldsymbol{r}_i) = \begin{array}{cccc} & q_1\phi_2(\boldsymbol{r}_1) & q_1\phi_3(\boldsymbol{r}_1) & q_1\phi_4(\boldsymbol{r}_1) \\ q_2\phi_1(\boldsymbol{r}_2) & & q_2\phi_3(\boldsymbol{r}_2) & q_2\phi_4(\boldsymbol{r}_2) \\ q_3\phi_1(\boldsymbol{r}_3) & q_3\phi_2(\boldsymbol{r}_3) & & q_3\phi_4(\boldsymbol{r}_3) \\ q_4\phi_1(\boldsymbol{r}_4) & q_4\phi_2(\boldsymbol{r}_4) & q_4\phi_3(\boldsymbol{r}_4) & \end{array}$$

ところで、

$$q_i \phi_j(\boldsymbol{r}_i) = q_j \phi_i(\boldsymbol{r}_j) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

より

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_i \phi_j(\boldsymbol{r}_i)$$

$$q_1 \sum_{j\neq 1} \phi_j(\boldsymbol{r}_1) \quad \boxed{\qquad\qquad q_1\phi_2(\boldsymbol{r}_1) \quad q_1\phi_3(\boldsymbol{r}_1) \quad q_1\phi_4(\boldsymbol{r}_1)}$$

$$q_2 \sum_{j\neq 2} \phi_j(\boldsymbol{r}_2) \quad \boxed{q_2\phi_1(\boldsymbol{r}_2) \qquad\qquad q_2\phi_3(\boldsymbol{r}_2) \quad q_2\phi_4(\boldsymbol{r}_2)}$$

$$q_3 \sum_{j\neq 3} \phi_j(\boldsymbol{r}_3) \quad \boxed{q_3\phi_1(\boldsymbol{r}_3) \quad q_3\phi_2(\boldsymbol{r}_3) \qquad\qquad q_3\phi_4(\boldsymbol{r}_3)}$$

$$q_4 \sum_{j\neq 1} \phi_j(\boldsymbol{r}_4) \quad \boxed{q_4\phi_1(\boldsymbol{r}_4) \quad q_4\phi_2(\boldsymbol{r}_4) \quad q_4\phi_3(\boldsymbol{r}_4) \qquad\qquad}$$

電荷$q_1,\ q_2,\ \ldots$**が位置**$\boldsymbol{r}_i$**に作る電位は、一般的に** $\phi(\boldsymbol{r}_i) = \sum_{j\neq i} \phi_j(\boldsymbol{r}_i)$

と表せるので、

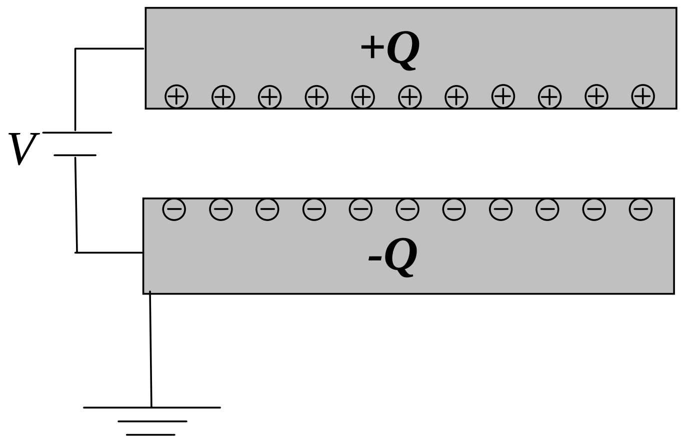
$$U = \frac{1}{2}\sum_i q_i \phi(\boldsymbol{r}_i)$$

これを連続的な電荷分布に拡張すると、

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\,dV$$

コンデンサーの静電エネルギー①

面電荷密度$\sigma = Q/A$



$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})dV$$

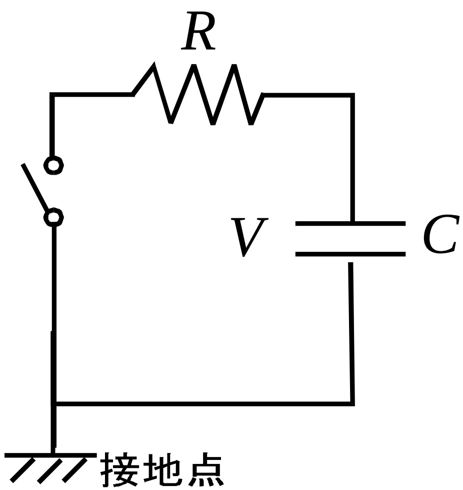
$$= \frac{1}{2}\int \sigma(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})dS$$

$$= \frac{1}{2}\sigma VA$$

$$= \frac{1}{2}QV\left(= \frac{1}{2}CV^2\right)$$

コンデンサーの放電によって放出されるエネルギー

電位差がVのコンデンサーを、時刻 $t=0$ に放電させる。



$$I(t)=\frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

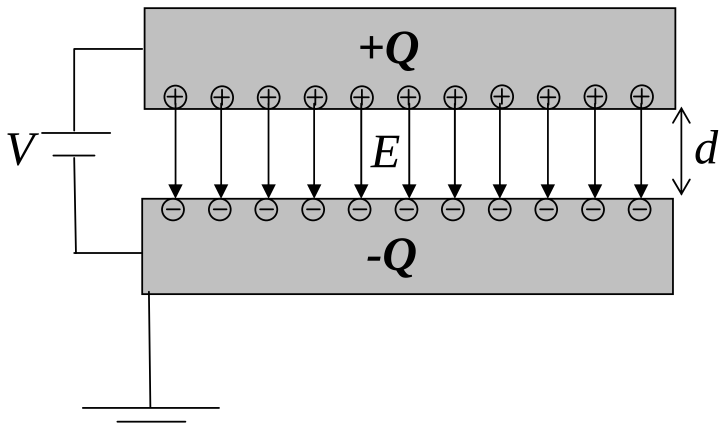
$$U=\int_0^\infty RI^2(t)dt=\frac{V^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}}dt$$

$$=\frac{V^2}{R}\left[-\frac{RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{2}CV^2$$

コンデンサーの静電エネルギー②

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}, \quad V = Ed$$ より



$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{A}{d}(Ed)^2$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot Ad$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot$$ (電場の存在する体積)

エネルギー密度 $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ で静電エネルギーが空間に蓄えられている

第1章レポート問題5

半径aの導体球の表面に一様に電荷Qが帯電している。
この導体の静電エネルギーを

① $$U=\frac{1}{2}\int\rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})dV$$

② $$U=\int u dV=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int E^2 dV$$

の2通りで計算し，一致することを確認せよ。