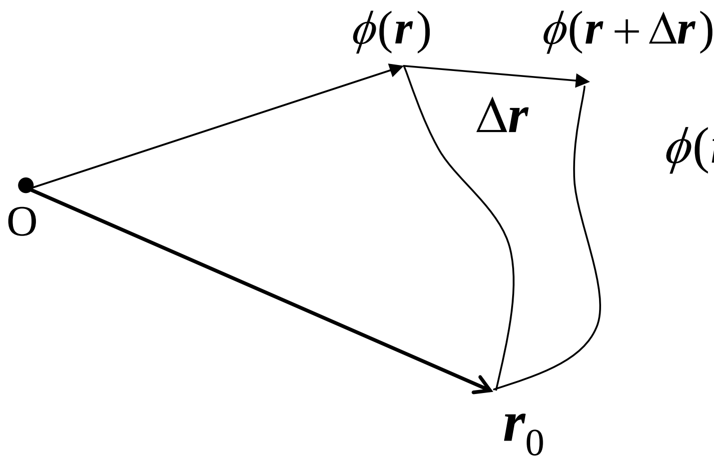
電位と電場の関係



$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})-\phi(\boldsymbol{r}) &= -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' + \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' \\ &= -\left(\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' + \int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'\right) \\ &= -\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'\end{aligned}$$

$\Delta\boldsymbol{r}$ が小さければ、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')$ は近似的に一定とみなせるので

$$\phi(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})-\phi(\boldsymbol{r}) \cong -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r}' = -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\Delta\boldsymbol{r}$$

$\phi(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})-\phi(\boldsymbol{r})\cong -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\Delta\boldsymbol{r}$ を成分に分けて表すと

$$\phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-\phi(x,y,z)\cong -\left(E_x(\boldsymbol{r})\Delta x+E_y(\boldsymbol{r})\Delta y+E_z(\boldsymbol{r})\Delta z\right)$$

$\Delta y=\Delta z=0$として、両辺を Δxで割ると、

$$\frac{\phi(x+\Delta x,y,z)-\phi(x,y,z)}{\Delta x}\cong -E_x(\boldsymbol{r})$$

従って

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x+\Delta x,y,z)-\phi(x,y,z)}{\Delta x}\equiv \boxed{\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x}=-E_x(\boldsymbol{r})}$$

y,z成分に関しても同様に、

$$\boxed{\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial y}=-E_y(\boldsymbol{r}),}\quad \boxed{\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial z}=-E_z(\boldsymbol{r})}$$

以上の結果ををまとめると

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \left(E_x(\boldsymbol{r}), E_y(\boldsymbol{r}), E_z(\boldsymbol{r})\right) = -\left(\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial y}, \frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi(\boldsymbol{r})$$

ここで次のような演算子を定義する

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$ **ナブラ演算子**

これを用いれば、電場と電位の関係は、次のように簡単に表現できる：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})$$

ナブラ演算子はスカラー関数にかかる場合「gradient(グラディエント)」（日本語では「勾配」）と読む

第1章レポート問題3

位置$\boldsymbol{r}'$に置かれた電荷がつくる電位

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}$$

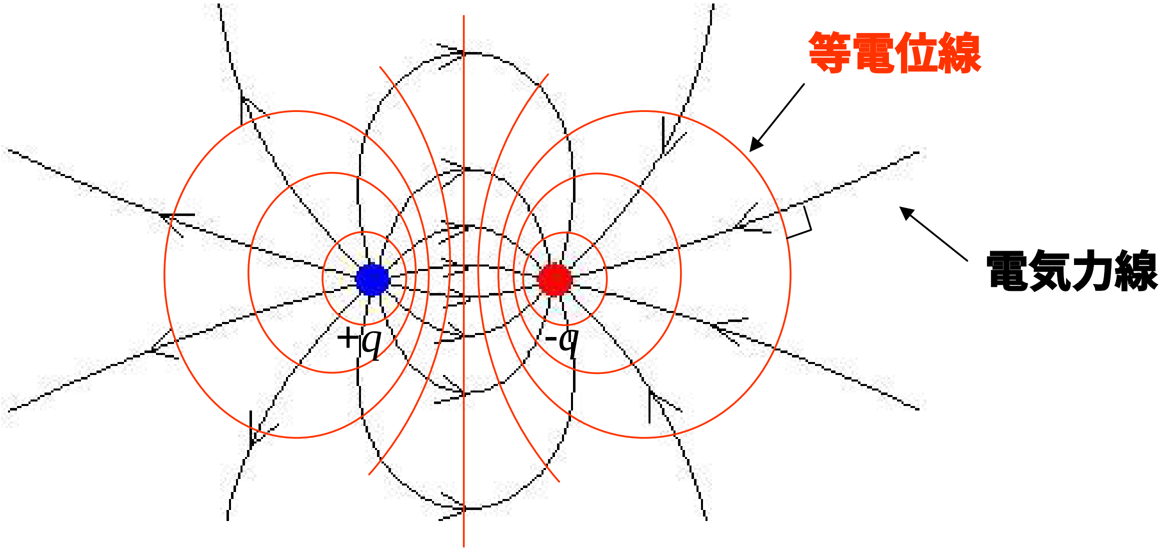
の勾配を計算することにより、この電荷が作る電場が

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}$$

となることを確認せよ。

等電位面 (線)

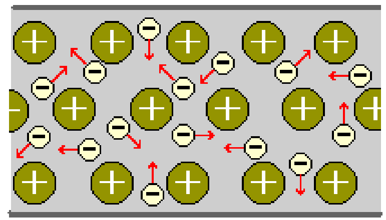
電位の等しいような面 (線) のこと



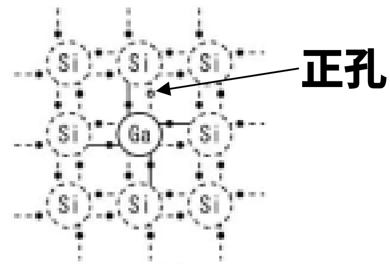
等電位面 (線) と電気力線 (電場) は必ず垂直である (さもなければ、等電位面 (線) に沿った方向へ電荷を動かしたときの仕事がゼロにならず、等電位面 (線) であることと矛盾してしまう) 。

導体

自由に動くことのできる電子 (自由電子) を持つ物体 (おもに金属)



(参考) p型半導体では、正孔 (正の電荷) が移動する



ここでは、電荷の移動が止まっているならばどのような電荷分布が導体内で実現さるべきかを考える (電荷が常に導体内を移動し続ける場合 (定常電流) は第2章で考える)

＜前提となる物理法則＞

①電場があれば電子は動く (ニュートンの運動方程式)
②電場はガウスの法則を満たす

(i) 導体の内部では電場はゼロ： $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$

(ii) 導体の内部では電荷密度はゼロ： $\rho(\boldsymbol{r}) = 0$

(iii) 電荷分布は（あるとすれば）導体の表面にのみ現れる（静電誘導）

(iv) 導体の内部および表面の電位は一定： $\phi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{const}$

(v) 導体表面付近の電場は、表面に垂直である

(vi) 導体表面の面電荷密度がσならば、そのすぐ外側の電場の大きさは $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$