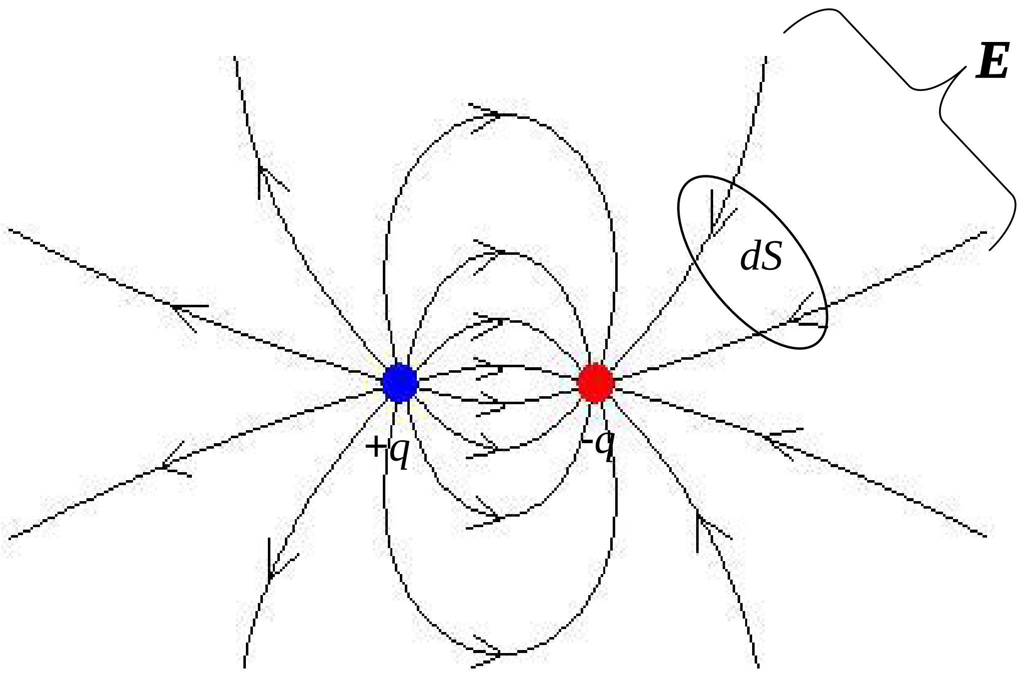
電気力線

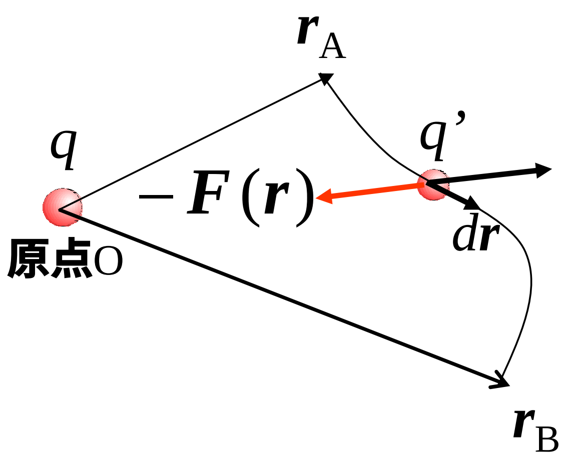
電場の方向を結んで描いた曲線（実体はない）

電荷qからq/ε_0本の電気力線が出ていると約束すると、
電気力線の密度が電場の大きさを表す.

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$ 本の電気力線



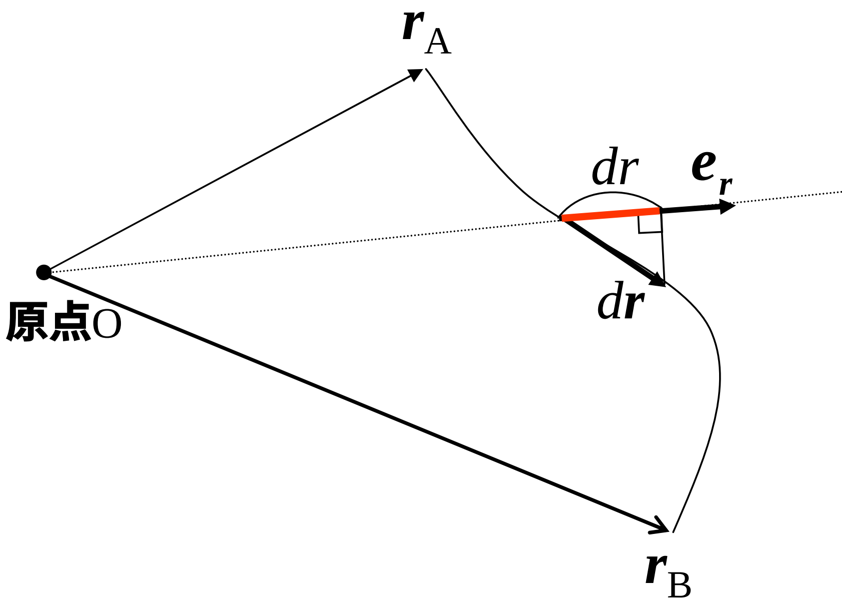
電荷を運ぶのに必要な仕事



$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

電荷q'を位置$\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$から$\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$へ移動させるために必要な仕事は

$$W_{AB} \equiv -\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B}\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{r}$$



$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \cdot d\boldsymbol{r} = dr$$

原点からの距離の変化

$$W_{AB} = -\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B}\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r \cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = \boxed{\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)}$$

始点と終点のみで決まる
(仕事が経路に依らない)
→$F(r)$は保存場

q=1のとき、$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$であるから、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$も保存場

保存場$E(r)$の性質

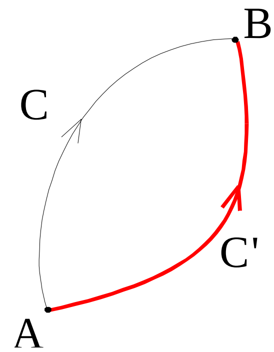
仕事が経路に依存しないので

$$\int_{A(C)B} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{A(C')B} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

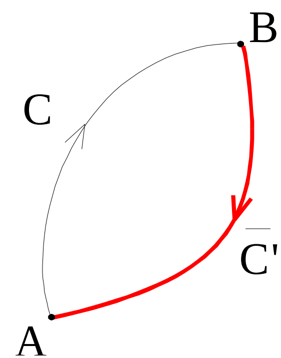
$$\Leftrightarrow \int_{A(C)B} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = - \int_{B(\overline{C'})A} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\Leftrightarrow \int_{A(C)B} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{B(\overline{C'})A} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

$$\Leftrightarrow \oint_{A(C)B(\overline{C'})A} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$



$$\int_{A(C')B} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$



$$\int_{B(\overline{C'})A} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

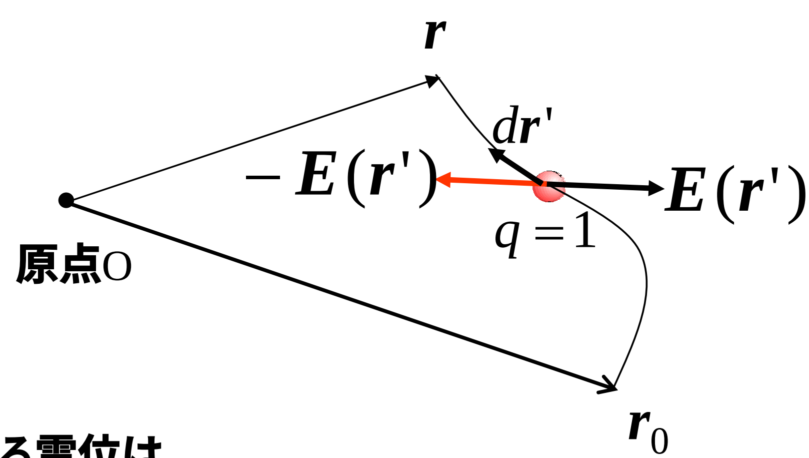
経路C,C'、位置A, Bは任意に選べるので、一般に

$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$ ←$E(r)$が保存場であることの数学的表現

電位

基準点r_0から別の位置rに単位電荷を運ぶために必要な仕事、つまり単位電荷の持つ位置エネルギー
(単位はJ/C)

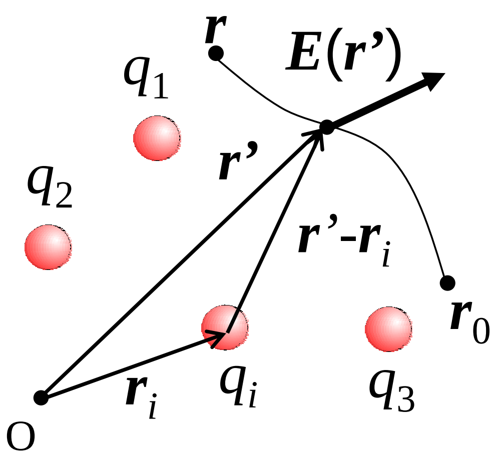
$$\phi(\boldsymbol{r}) \equiv -\int_{r_0}^{r} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'$$



特に、原点Oにある電荷q**がつくる電位は**

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right) \xrightarrow[\text{基準点を無限遠にとると}]{r_0\to\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

電荷が複数存在している場合

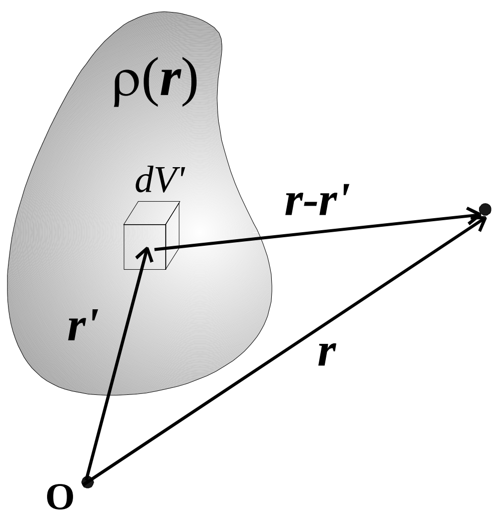


$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{r_0}^{r} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \int_{r_0}^{r} \frac{q_i}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i\right|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}\cdot d\boldsymbol{r}'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boxed{\sum_i \frac{q_i}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i\right|}}$$

電荷が連続的に分布している場合



$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boxed{\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}dV'}$$

第1章レポート問題2

半径aの球に電荷Qが

①表面に一様に分布している場合

②内部に一様に分布している場合

それぞれについて，球の中心からの距離rの位置における電位を求め，横軸を，縦軸をとするグラフに描け．