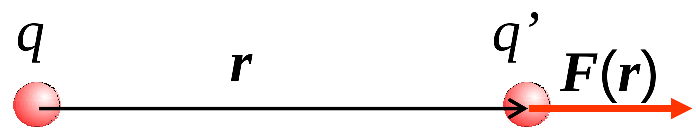
クーロンの法則の解釈



原点O

~~＜遠隔作用の考え方＞~~

~~電荷 q と q' との間に、クーロン力~~

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}e_r$$

~~が直接働く (空間は変化しない)~~

＜近接作用の考え方＞

電荷 q によって、空間にベクトル場

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}e_r$$

が作られる。位置 r に電荷 q' を置くと、この電荷は電場から

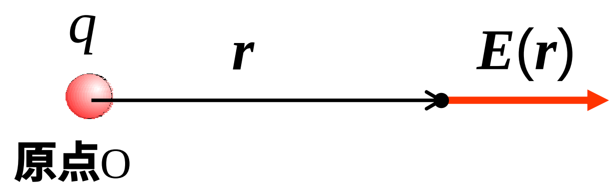
$$F(r) = q' E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}e_r$$

が働く

電荷の作る電場

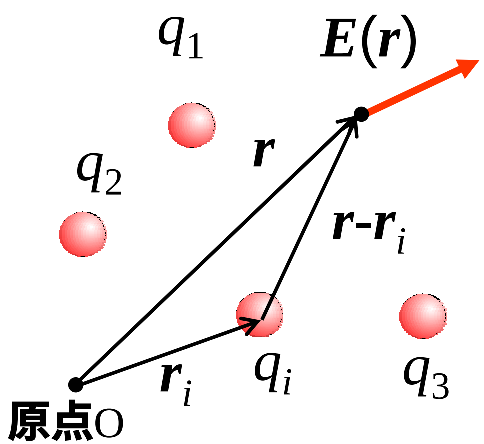
原点Oに置かれた電荷 q が位置 r につくる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$



一般に、複数の電荷q_1, q_2, …が位置$\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, …に存在しているとき、位置$\boldsymbol{r}$における電場は、クーロン力の重ね合わせの原理より

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_i \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i\right|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}$$

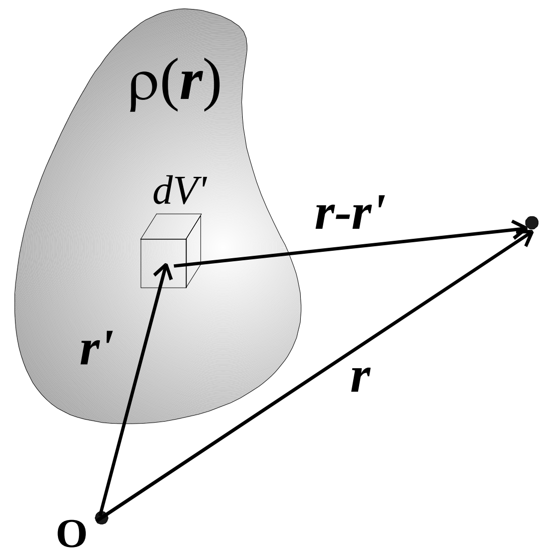


電荷分布の作る電場

電荷が連続的に分布しているとき、位置r'の近傍の単位体積中に含まれる電荷の量を電荷密度$\rho(r)$で表すことにすると、この電荷分布が作る電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}dV'$$

と表せる。

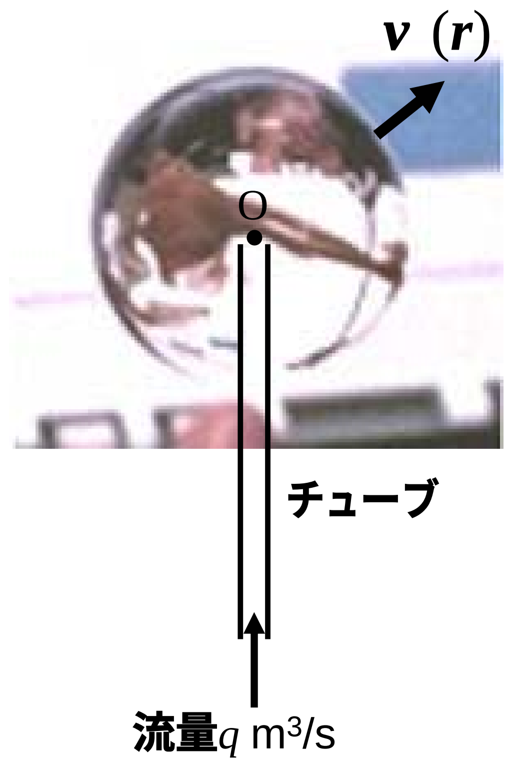


流体の速度場

原点Oから一定の割合q[m³/s]で縮まない流体が等方的に湧き出ているとする。このとき、位置$\boldsymbol{r}$における流体の速度場$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$[m/s]は

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}$$

と表せる。



速度場と電場のアナロジー

電場：$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \Leftrightarrow \varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boxed{\frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}}$$

$\Updownarrow$ 数学的に等価

速度場：$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boxed{\frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}}$$

原点Oに流量q の湧き出しがある速度場$v(r)$に関して成立つ数学的な性質は、
原点Oに電荷qがあるときの電場（にε_0をかけたもの）についても同様に成立つ。

面素を通る流体の流量

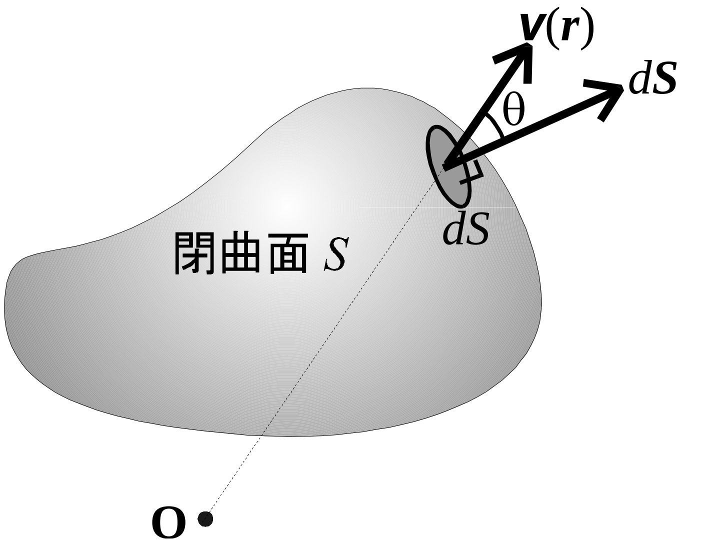
ある閉曲面S上の面素 dS を単位時間に通る流体の流量df は、

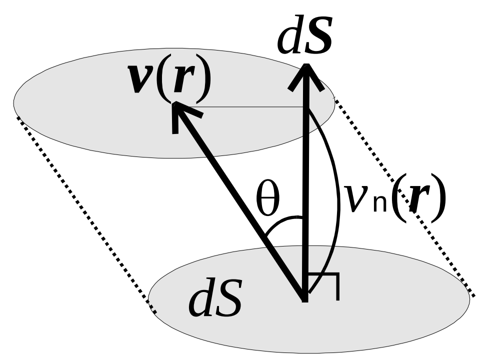
$$df = v(\boldsymbol{r})\cos\theta\, dS = v_n(\boldsymbol{r})\, dS$$

面素の法線ベクトル（閉曲面から湧き出る方向を正とする）と同じ向きで、大きさがdSであるようなベクトル$d\boldsymbol{S}$（面素ベクトルと呼ばれる）を用いれば、

$$df = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

と簡単に表現できる。

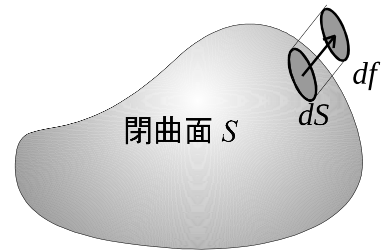




閉曲面から湧き出る流量

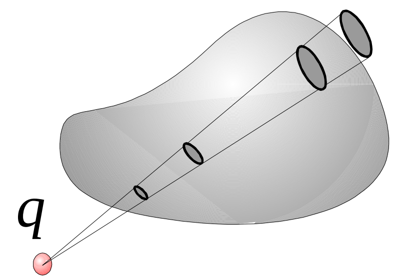
閉曲面Sを通って流れ出る流量は、閉曲面S上の面素を通る流量の総和であるから、

$$f = \int_S df = \int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$$



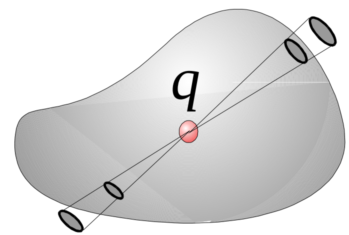
閉曲面Sの中に湧き出しが存在しないならば、

$$\int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$



閉曲面Sの中に湧き出しがqが存在するないならば、

$$\int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = q$$



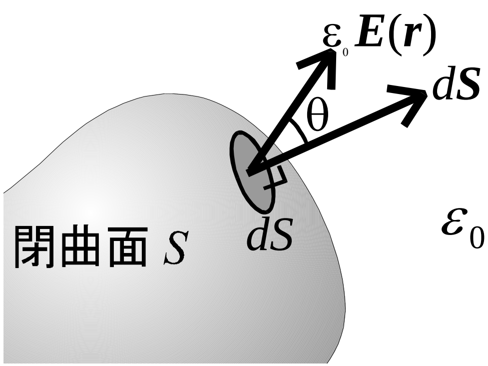
ガウスの法則

速度場$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$と電場$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$に真空の誘電率をかけた$\varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$は数学的に等価

電荷が作る電場は

$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \begin{cases} 0 & \text{電荷}q\text{が閉曲面}S\text{の外部にある場合} \\ q & \text{電荷}q\text{が閉曲面}S\text{の内部にある場合} \end{cases}$$

を満たす。これを**ガウスの法則**と呼ぶ。



$\varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$　は**電束**と呼ばれる（流体のような実態はない）

一般的なガウスの法則

複数の電荷$q_1, q_2, \ldots$が存在するとき、

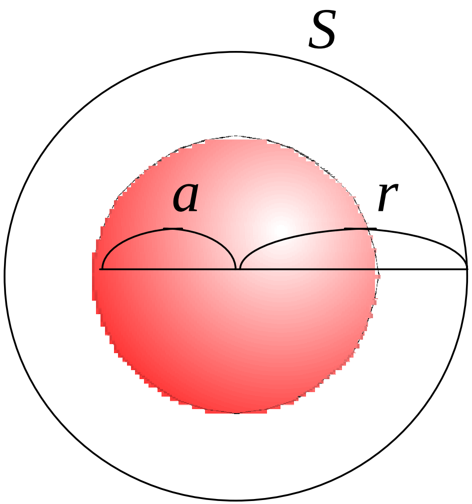
$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \sum_{S\text{内部}} q_i$$

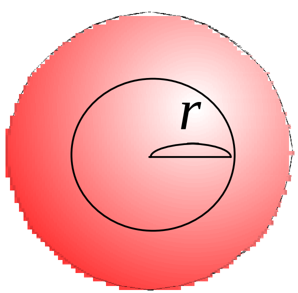
電荷が電荷密度$\rho(\boldsymbol{r})$で連続的に分布している場合には

$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho(\boldsymbol{r}) dV$$

ガウスの法則の応用例①

半径aの球の表面上に電荷Qが一様に帯電している場合の電場





対称性より、電場は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\boldsymbol{e}_r$ **と表せる**

i)　$r>a$**のとき**

ガウスの法則より

$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho(\boldsymbol{r}) dV$$

左辺＝$\varepsilon_0 \int_S E(r)\boldsymbol{e}_r \cdot d\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 E(r) \int_S dS = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E(r)$

右辺＝Q

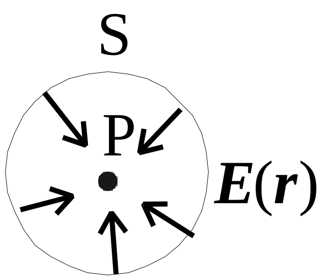
従って $4\pi r^2 E(r) = Q$

故に $E(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q}{r^2}$　　$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q}{r^2} \boldsymbol{e}_r$

ii)　0<r<a**のとき**

同様に右辺＝ $4\pi\varepsilon_0 r^2 E(r)$　**右辺＝**0 **より** $E(r) = 0$

ガウスの法則の応用例②
自由空間に電荷の安定点は存在するか？



背理法を用いる

点Pが電荷（正電荷とする）安定点だとすると、この点Pの近傍の電場は点Pの方向を向いていなければならない。点Pを囲む微小な閉曲面Sを考えると、この閉曲面S上のどこでも電場は内向きなので、この閉曲面Sから湧き出る電束の和は必ず負になる。一方、この閉曲面S内の電荷の和は（自由空間を考えているので）当然ゼロである。したがって、これはガウスの法則と矛盾するので、電荷の安定点は存在し得ない。
（Earnshawの定理）

第1章レポート問題1

(1) 無限に広い平面板上に、面密度ρで一様に電荷が分布している。このとき、この平面から距離rの位置における電場の大きさ$E(r)$をガウスの法則より求めよ.

(2) 半径aの球の内部に電荷Qが一様に帯電している. このとき, 球の中心からrの距離の位置における電場の大きさ$E(r)$をガウスの法則より求め, その結果を横軸r, 縦軸$E(r)$とするグラフに描け.