

平成17年度電磁気学A

担当: 鳥井 寿夫(とりい よしお) 居室: 16号館224A
tel: 03-5454-6757 (内線46757)
e-mail: ytorii@phys.c.u-tokyo.ac.jp
<http://maildbs.c.u-tokyo.ac.jp/~torii>

授業日: 毎週水曜2限(10:40~12:10)、
10/5~12/21, 1/11~1/18(計13回)

講義資料

<http://maildbs.c.u-tokyo.ac.jp/~torii/lectures/EM/index.htm>

(東京大学教養学部HP > 専攻 > 相関基礎科学系 > 物性物理・一般物理 > 鳥井寿夫)

にて

- ・レジュメ(講義で配ったもの)
 - ・スライド資料(講義で使用したもの)
 - ・過去問題
- を公開します

評価

レポート点(50%) + 期末試験(50%)

レポートの提出期限: 次回の授業の開始前。教室にて回収。

注意!

レポートは決して他人のものを写してはならない。
教科書は見てもよいが、自分の言葉で解答を表現
すること(教科書の丸写しはカンニングとみなす)。

教科書

特に指定しない。毎回配るレジュメがテキストになる。以下に参考書を挙げる

兵頭俊夫著・電磁気学(裳華房)

電磁気学で使う数学を基礎から丁寧に説明してある。わかり易さを重視し、積分形に徹して電磁気学を論じている。

加藤正昭著・電磁気学(東京大学出版会)

教養で習う電磁気学を要領よくまとめてあるスタンダードな教科書。具体例や補足説明も多い。

ファインマン物理学III「電磁気学」(岩波書店)

ファインマン(1965年ノーベル物理学賞)が実際にカリフォルニア工科大学で行った講義をまとめたもの。「電磁気学」という枠にとらわれず、物理学全体または他の学問分野を常に視野に入れた著者独特の説明は、他の教科書では見られない。不朽の教科書。

この講義の目標

電磁気学の基本法則の理解

時間変化しない電磁場 (静電場、静磁場)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \quad (\text{ローレンツ力})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dV' \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV & (\text{電場のガウスの法則}) \\ \oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 & (\text{循環ゼロの法則}) \end{cases}$$

(クーロンの法則)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dV' \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} & (\text{アンペールの法則}) \\ \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0 & (\text{磁場のガウスの法則}) \end{cases}$$

(ビオ - サバールの法則)

時間変化する電磁場

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}))$$

$$\epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

しかし、これらの基本方程式を知っていることは、物理を理解したことにならない

この講義の目標

電磁現象の定性的理解

電磁気学を学べば、例えば次のようなことが理解できます

- ・車の中は落雷に対して安全である(静電遮蔽)
- ・ウランが核分裂で放出されるエネルギーは原子核の静電エネルギー(原子力エネルギーはウランの場合、実は電気エネルギー)
- ・磁気力とは、クーロン力と相対論的効果の現れである(磁気力は座標系によってはクーロン力とみなせる)
- ・光は電磁場である

第0章

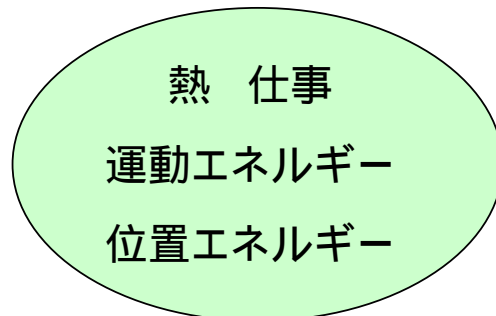
单位系

物理量の次元と単位

- 物理量 (physical quantity) : 測定によって定量化される量
- 単位 (unit) : 各物理量の基準となる大きさ
- 次元 (dimension) : 物理量の質的違いを表す概念
(足すことに意味がある物理量は同じ次元を持つ)

(例)

エネルギーの次元を持つ物理量



エネルギーの単位



国際単位系 (SI) (基本単位)

	物理量	単位の名称	記号	
基本単位	長さ	メートル	m	MKSA 単位系
	質量	キログラム	kg	
	時間	秒	s	
	電流	アンペア	A	
	温度	ケルビン	K	
	物理量	モル	mol	
	光度	カンデラ	cd	
補助単位	平面角	ラジアン	rad	
	立体角	ステラジアン	sr	

* その他の単位は、上の基本単位の乗除のみで表現できる (組立単位)

国際単位系 (SI) (組立単位)

	物理量	記号	単位の名称	SI基本単位による表現
組	周波数 (1/ 時間)	Hz	ヘルツ	s^{-1}
	力 (質量 × 加速度)	N	ニュートン	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
立	圧力 (力/ 面積)	Pa	パスカル	$N/m^2 = m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
	エネルギー (力 × 距離)	J	ジュール	$N \cdot m = m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
単	仕事率 (仕事/ 時間)	W	ワット	$J/s = m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
	電気 (電流 × 時間)	C	クーロン	$A \cdot s$
位	電圧 (エネルギー/ 電気量)	V	ボルト	$J/C = m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
	静電容量	F	ファラッド	$C/V = m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$

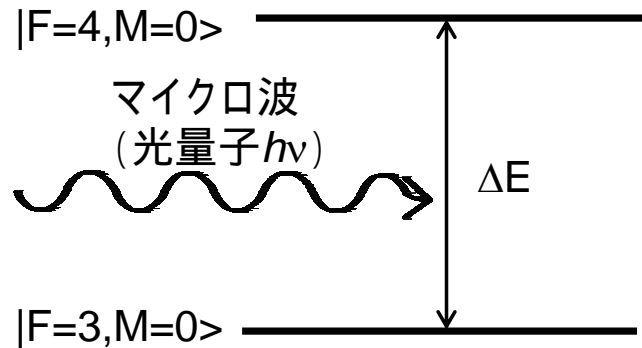
時間の単位（セシウム原子時計）

1sは、 ^{133}Cs の基底状態の二つの超微細構造準位 ($F=4, M=0$ および $F=3, M=0$) の間のマイクロ波遷移に対応する放射の9,192,631,770周期の継続時間



米国立標準技術研究所が開発した超小型原子時計の心臓部 (2004年9月2日朝日新聞より)

< ^{133}Cs , 6S軌道のエネルギー準位 >




マイクロ波がCs原子と共鳴 ($\Delta E = h\nu$) しているときの周波数を9,192,631,770Hzと定義

長さの単位

1mは、光が真空中を $1/299792458$ 秒間に進む距離
(1905年にアインシュタインが提唱した光速不変の
原理を信じ、光速は 299792458 m/sであると定義)

レーザー



真空中の光速は $299,792,458$ m/s (定義)

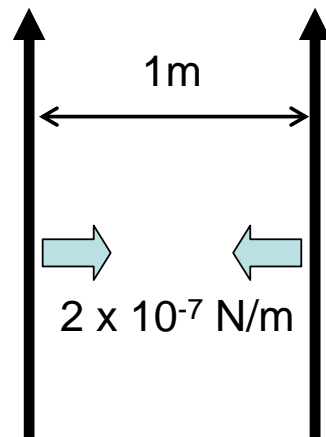
質量の単位

1kgは、キログラム原器(直径、高さとも39mmの円柱形で、白金90%、イリジウム10%の合金)の質量



電流の単位

1Aは、真空中に1 mの間隔で平行に置かれた無限に小さい円形断面積を有する無限に長い2本の直線状導体のそれぞれを流れ、これらの導体に1 mごとに 2×10^{-7} Nの力を及ぼし合う一定の電流



第1章

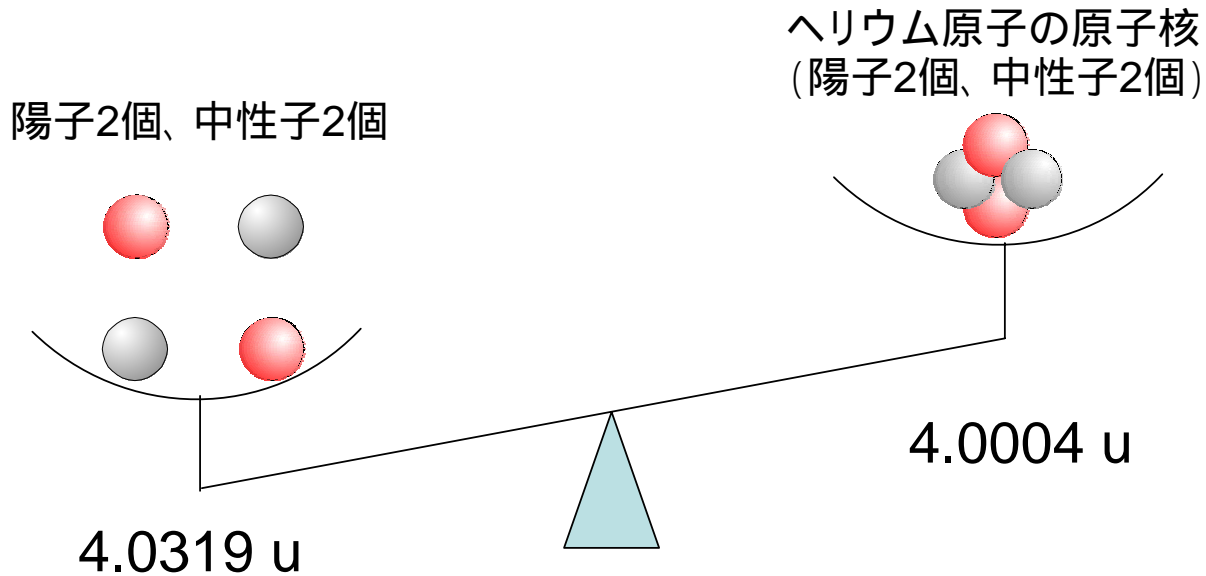
静電場

電荷の基本的性質

1. 電荷にはプラスとマイナスの2種類あり、同種同士は反発し、異種同士は引き合う。
2. 原子核や電子の電荷は、常に電気素量 ($e=1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$) の整数倍である。陽子の電荷は常に e 、電子の電荷は常に $-e$ である。(陽子や中性子を構成しているクォークは $e/2, e/3$ の電荷を持つとされているが、単独では観測されない。)
3. いかなる物理的または化学的变化に際しても、全電荷の和は不変である(電荷の保存則)

電荷と質量の大きな違い

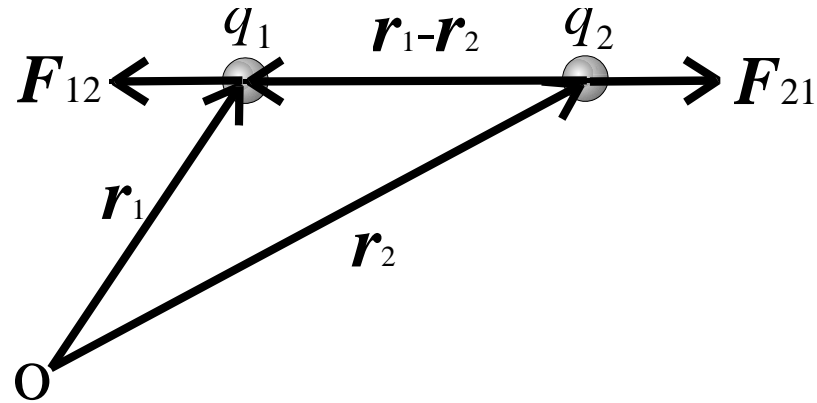
質量は保存しない！（質量素量などない）



($u = {}^{12}\text{C}/12 = 1.66 \times 10^{-27} \text{kg}$) 原子質量単位

$$E = mc^2 \quad (\text{質量はエネルギーの一形態})$$

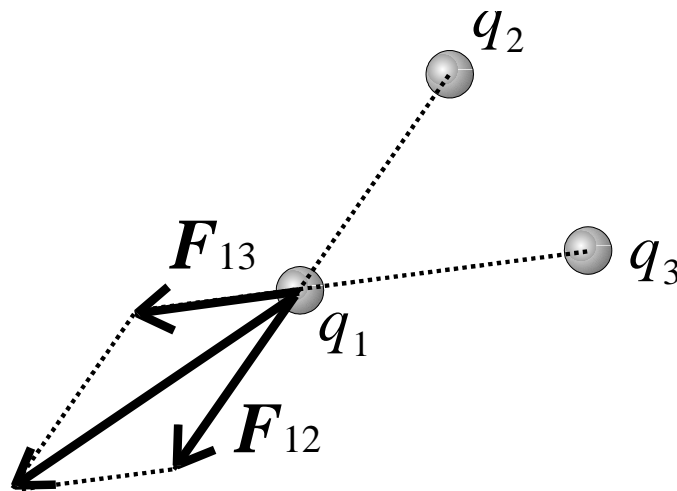
二つの電荷の間に働く力の向き



対称性より $\mathbf{F}_{12} = \alpha(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ (中心力)

作用・反作用
の法則より $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$

力の重ね合わせの原理

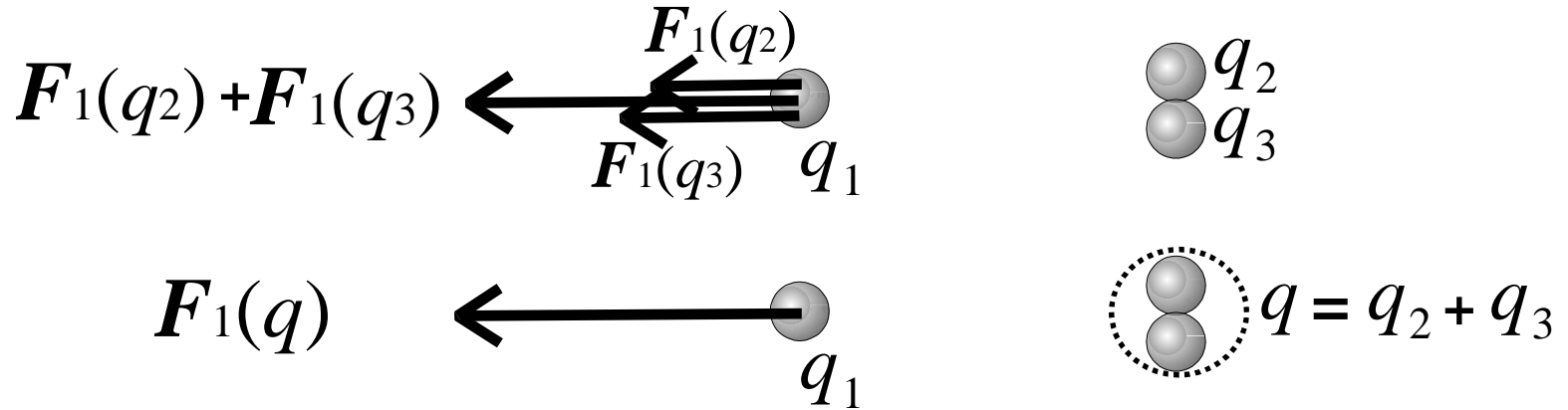


$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13}$$

複数の力が働いている場合

$$\mathbf{F}_1 = \sum_i \mathbf{F}_{1,i}$$

力と電荷の関係



力の重ね合せの原理より

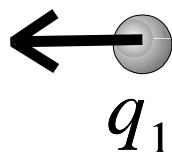
$$\mathbf{F}_1(q) = \mathbf{F}_1(q_2 + q_3) = \mathbf{F}_1(q_2) + \mathbf{F}_1(q_3)$$

これを満たすには

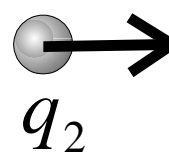
$$\mathbf{F}_1(q) \propto q$$

力と電荷の関係

$$\mathbf{F}_{12} \propto q_2$$



$$\mathbf{F}_{21} \propto q_1$$



作用・反作用の法則より

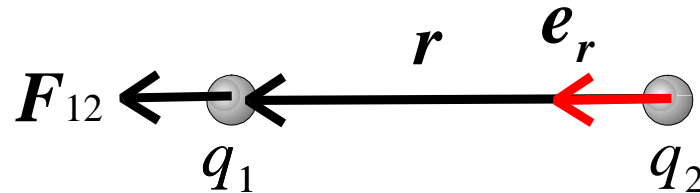
$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

したがって

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \propto q_1 q_2$$

2つの電荷の間に働く力は、お互いの電荷の積に比例する。

クーロンの法則



電荷 q_2 が電荷 q_1 に及ぼす力 F_{12} は、 r を電荷 q_2 から電荷 q_1 に向かうベクトルとすると

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} e_r \quad \left(e_r \equiv \frac{r}{r} \right)$$

$$k = 10^{-7} c^2 \approx 8.988 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

真空の誘電率

後の便宜のために $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ と定義すると

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

ϵ_0 : 真空の誘電率

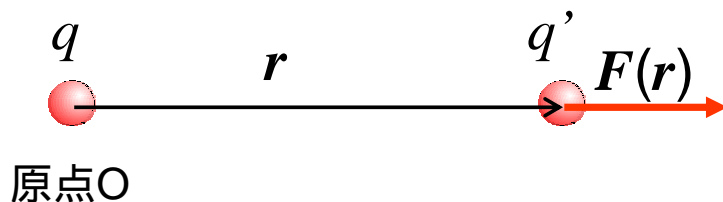
電磁気学における電場・磁場の定義

速度 \mathbf{v} で運動している電荷 q が位置 \mathbf{r} で受ける力は

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}))$$

と表せることが(これまでの経験から)わかっている。この電荷に働く力をローレンツ力と呼び、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ を電場、 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ を磁場と定義する。

クーロンの法則の解釈



< 遠隔作用の考え方 >

電荷 q と q' との間に、クーロン力

$$F(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \mathbf{e}_r$$

が**直接**働く (空間は変化しない)

< 近接作用の考え方 >

電荷 q によって、空間にベクトル場

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r$$

が作られる。位置 r に電荷 q' を置くと、この電荷は電場から

$$F(\mathbf{r}) = q' E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \mathbf{e}_r$$

が働く

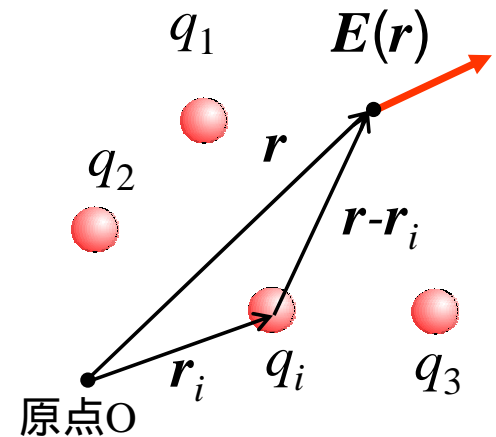
電荷の作る電場

原点Oに置かれた電荷 q が位置 r につくる電場は

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r$$


一般に、複数の電荷 q_1, q_2, \dots が位置 r_1, r_2, \dots に存在しているとき、位置 r における電場は、クーロン力の重ね合わせの原理より

$$E(\mathbf{r}) = \sum_i E_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}$$

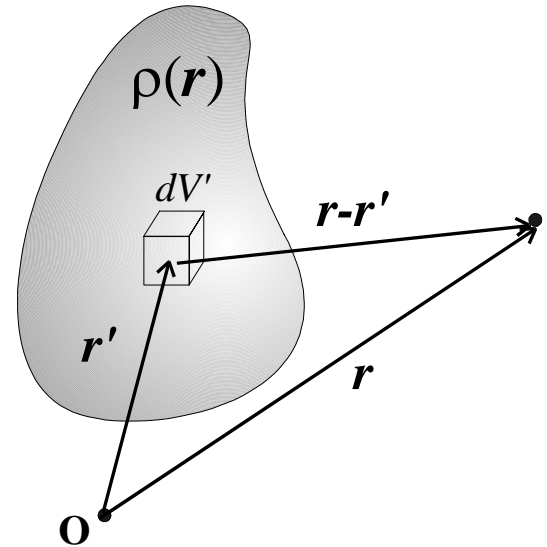


電荷分布の作る電場

電荷が連続的に分布しているとき、位置 r' の近傍の単位体積中に含まれる電荷の量を**電荷密度** $\rho(r)$ で表すことにすると、この電荷分布が作る電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dV'$$

と表せる。

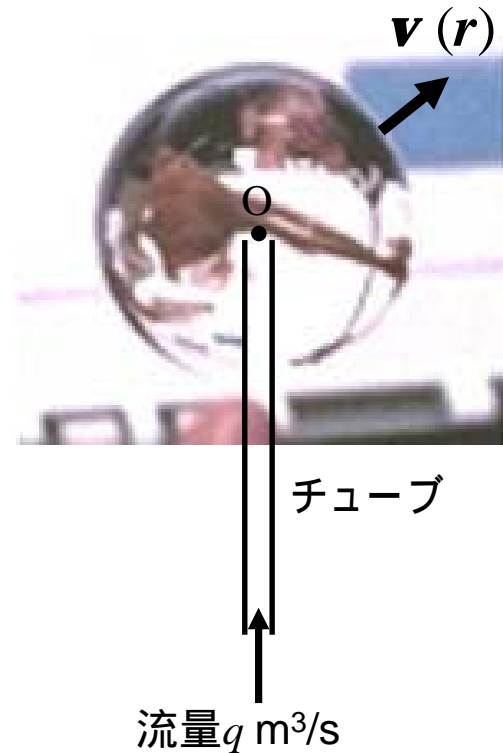


流体の速度場

原点 O から一定の割合 q [m^3/s]で縮まない流体が等方的に湧き出ているとする。このとき、位置 r における流体の速度場 $\mathbf{v}(r)$ [m/s]は

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r$$

と表せる。



速度場と電場のアナロジー

$$\text{電場: } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \Leftrightarrow \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r$$

 数学的に等価

$$\text{速度場: } \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r$$

原点 O に流量 q の湧き出しがある速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ に関して成立つ数学的な性質は、
原点 O に電荷 q があるときの電場(に ϵ_0 をかけたもの)についても同様に成立つ。

面素を通る流体の流量

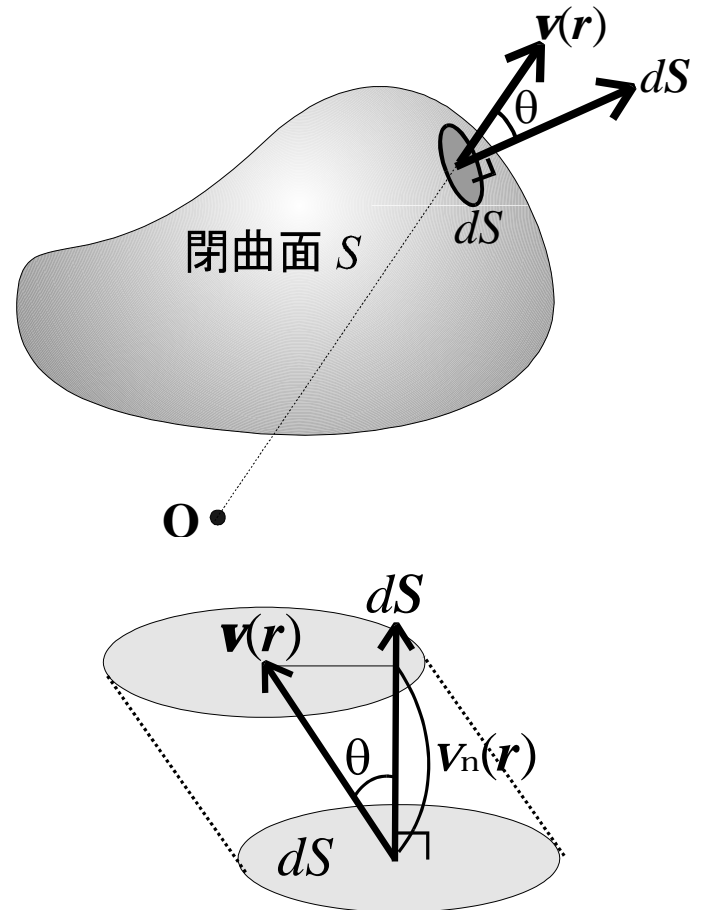
ある閉曲面 S 上の面素 dS を単位時間に
通る流体の流量 df は、

$$df = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cos \theta dS = v_n(\mathbf{r}) dS$$

面素の法線ベクトル(閉曲面から湧き出る
方向を正とする)と同じ向きで、大きさが dS
であるようなベクトル $d\mathbf{S}$ (**面素ベクトル**と呼
ばれる)を用いれば、

$$df = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

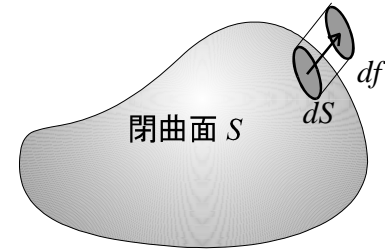
と簡単に表現できる。



閉曲面から湧き出る流量

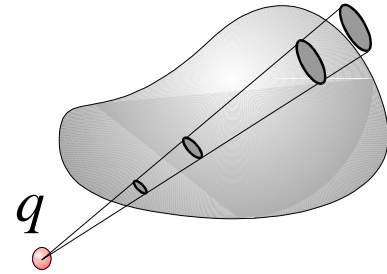
閉曲面 S を通過して流れ出る流量は、閉曲面 S 上の面素を通る流量の総和であるから、

$$f = \int_S df = \int_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$



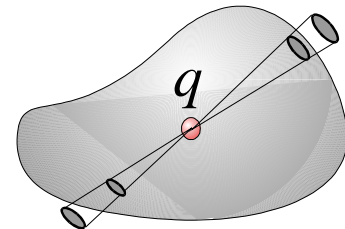
閉曲面 S の中に湧き出しが存在しないならば、

$$\int_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$



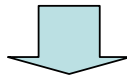
閉曲面 S の中に湧き出しが q が存在するならば、

$$\int_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = q$$



ガウスの法則

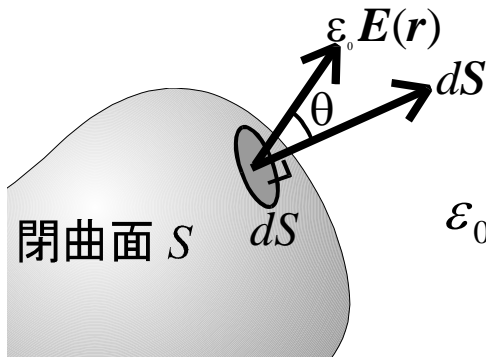
速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ と電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ に真空の誘電率をかけた $\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は数学的に等価



電荷が作る電場は

$$\epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & \text{電荷 } q \text{ が閉曲面 } S \text{ の外部にある場合} \\ q & \text{電荷 } q \text{ が閉曲面 } S \text{ の内部にある場合} \end{cases}$$

を満たす。これを**ガウスの法則**と呼ぶ。



$\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$ は**電束**と呼ばれる (流体のような実態はない)

一般的なガウスの法則

複数の電荷 q_1, q_2, \dots が存在するとき、

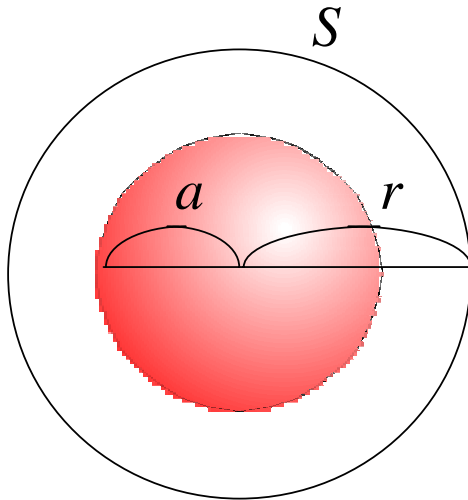
$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \sum_{S\text{内部}} q_i$$

電荷が電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ で連続的に分布している場合には

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

ガウスの法則の応用例

半径 a の球の表面上に電荷 Q が一様に帯電している場合の電場



対称性より、電場は $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$ と表せる

i) $r > a$ のとき

ガウスの法則より

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

$$\text{左辺} = \varepsilon_0 \int_S E(r)\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 E(r) \int_S dS = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E(r)$$

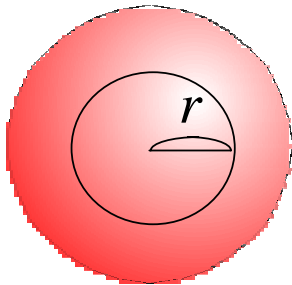
$$\text{右辺} = Q$$

$$\text{従って } 4\pi r^2 E(r) = Q$$

$$\text{故に } E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r$$

ii) $0 < r < a$ のとき

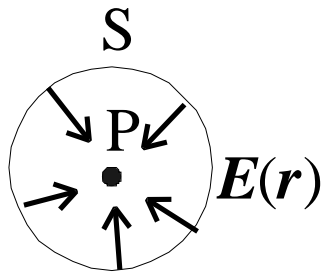
同様に右辺 = $4\pi\varepsilon_0 r^2 E(r)$ 右辺 = 0 より $E(r) = 0$



ガウスの法則の応用例

自由空間に電荷の安定点は存在するか？

背理法を用いる



点Pが電荷(正電荷とする)安定点だとすると、この点Pの近傍の電場は点Pの方向を向いていなければならない。点Pを囲む微小な閉曲面Sを考えると、この閉曲面S上のどこでも電場は内向きなので、この閉曲面Sから湧き出る電束の和は必ず負になる。一方、この閉曲面S内の電荷の和は(自由空間を考えているので)当然ゼロである。したがって、これはガウスの法則と矛盾するので、電荷の安定点は存在し得ない。

(Earnshawの定理)

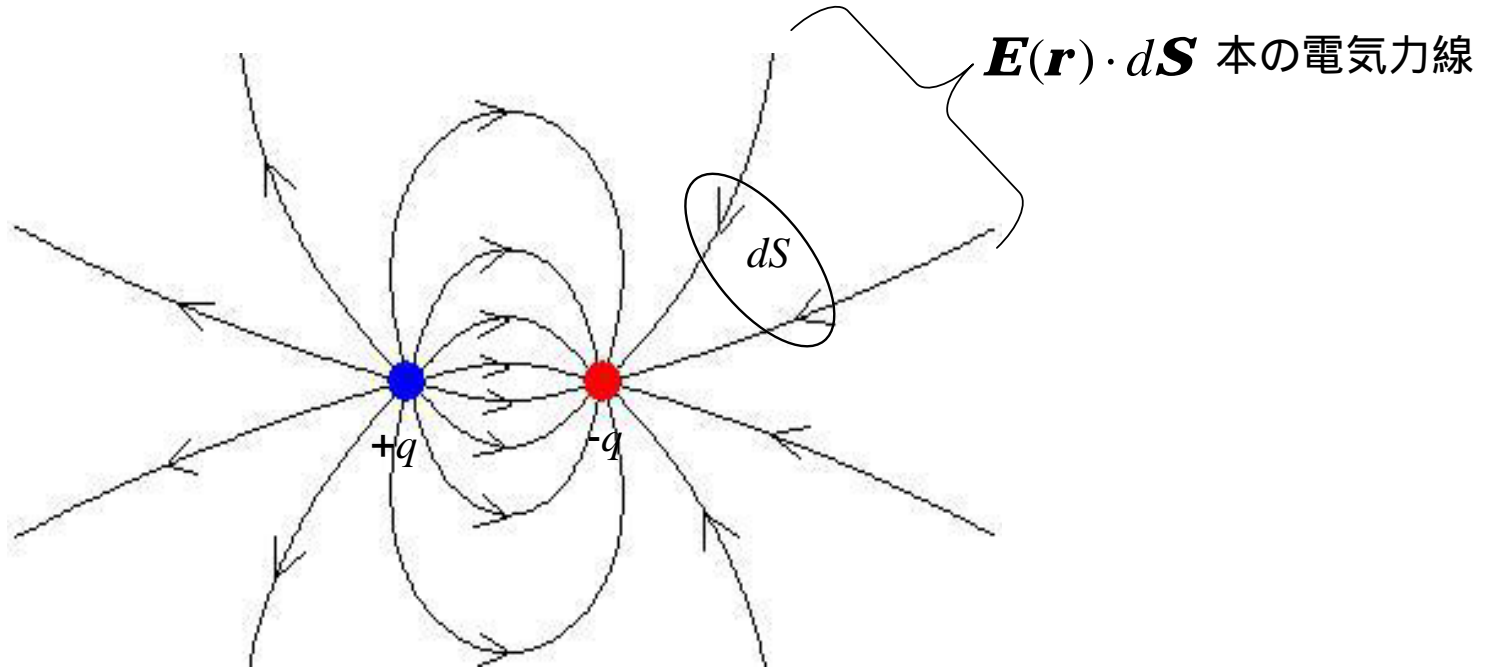
第1章レポート問題1

- (1) 無限に広い平面上に、面密度 σ で一様に電荷が分布している。このとき、この平面から距離 r の位置における電場の大きさ $E(r)$ をガウスの法則より求めよ。
- (2) 半径 a の球の内部に電荷 Q が一様に帯電している。このとき、球の中心から r の距離の位置における電場の大きさ $E(r)$ をガウスの法則より求め、その結果を横軸 r 、縦軸 $E(r)$ とするグラフに描け。

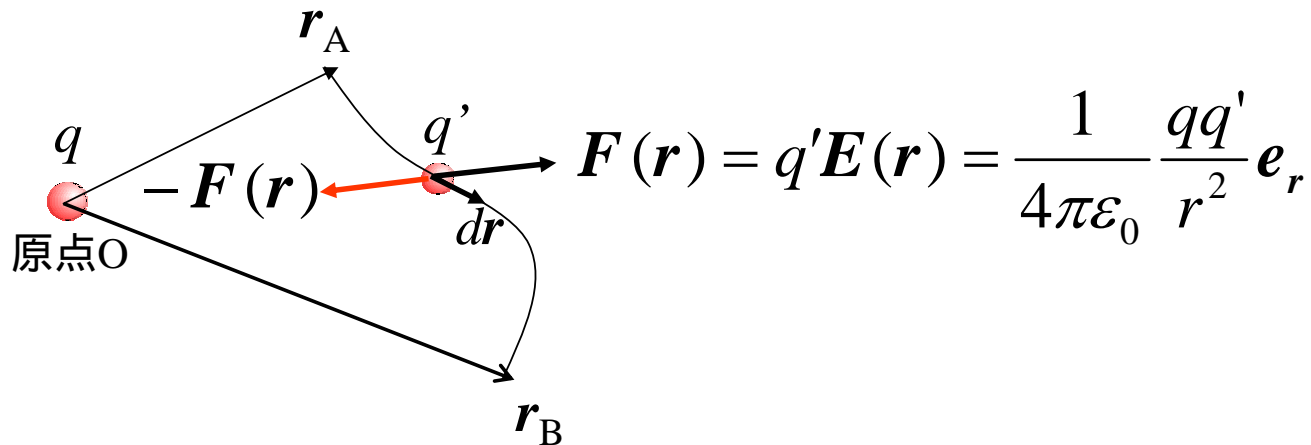
電気力線

電場の方向を結んで描いた曲線（実体はない）

電荷 q から q/ϵ_0 本の電気力線が出ていると約束すると、
電気力線の密度が電場の大きさを表す。

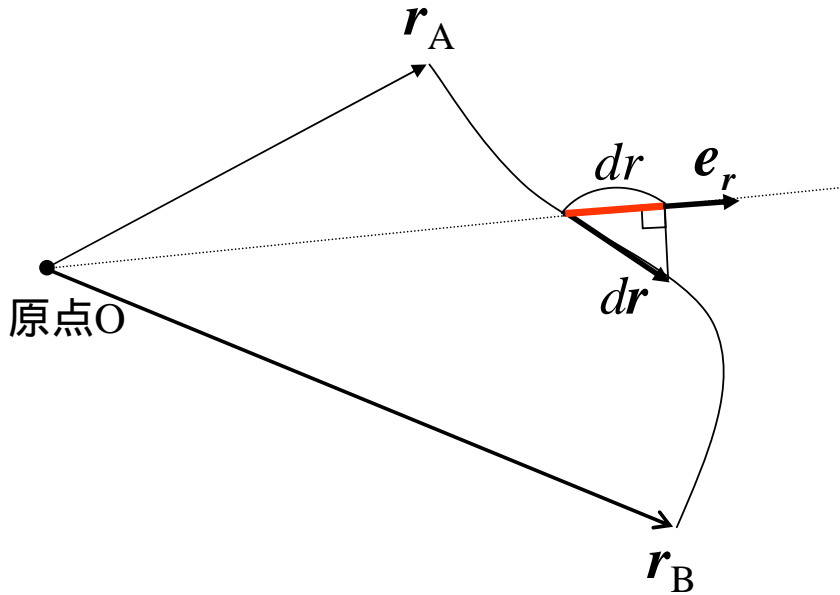


電荷を運ぶのに必要な仕事



電荷 q' を位置 r_A から r_B へ移動させるために必要な仕事は

$$W_{AB} \equiv -\int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r}$$



$$\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} = dr$$

原点からの距離の変化

$$W_{AB} = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

始点と終点のみで決まる
(仕事が経路に依らない)

$F(r)$ は保存場

$q=1$ のとき、 $F(r)=E(r)$ であるから、 **$E(r)$ も保存場**

保存場 $E(\mathbf{r})$ の性質

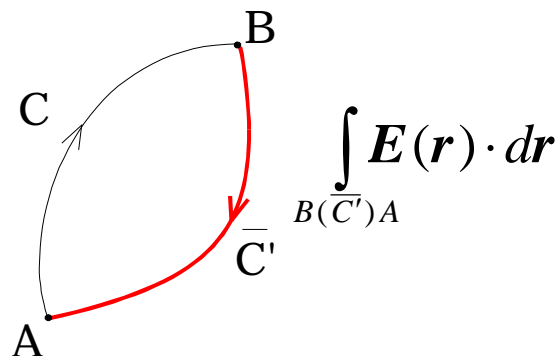
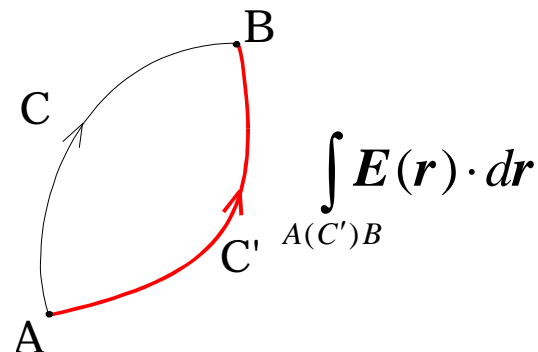
仕事が経路に依存しないので

$$\int_{A(C)B} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{A(\bar{C}')B} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

$$\Leftrightarrow \int_{A(C)B} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{B(\bar{C}')A} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

$$\Leftrightarrow \int_{A(C)B} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{B(\bar{C}')A} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

$$\Leftrightarrow \oint_{A(C)B(\bar{C}')A} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$



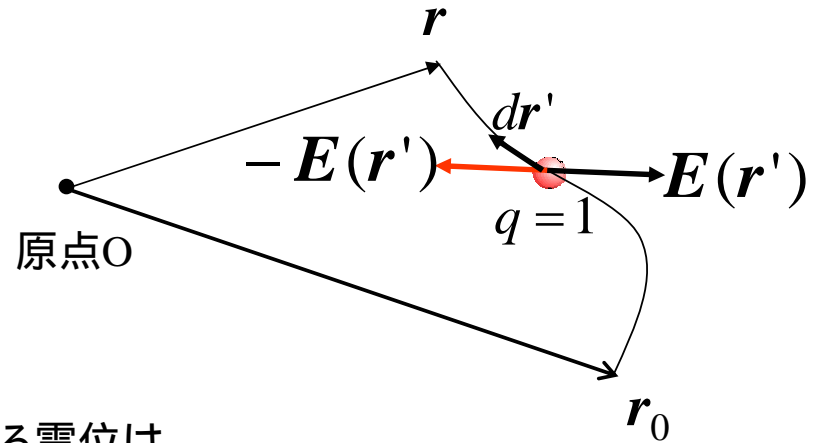
経路 C, C' 、位置 A, B は任意に選べるので、一般に

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) \text{が保存場であることの数学的表現}$$

電位

基準点 r_0 から別の位置 r に単位電荷を運ぶために必要な仕事、つまり単位電荷の持つ位置エネルギー
(単位はJ/C)

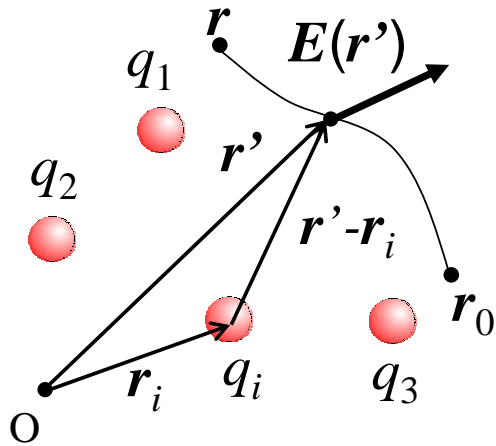
$$\phi(\mathbf{r}) \equiv -\int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$



特に、原点 O にある電荷 q がつくる電位は

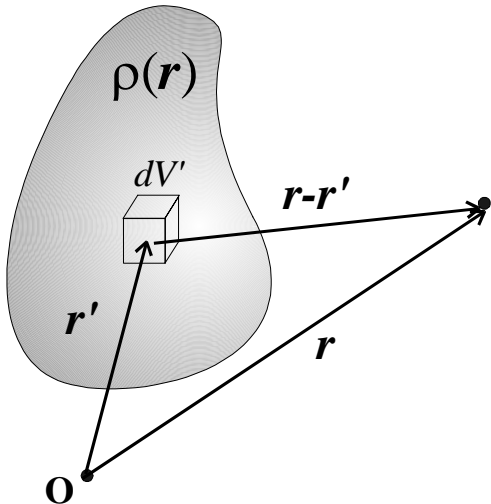
$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \xrightarrow[r_0 \rightarrow \infty]{\text{基準点を無限遠にとると}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

電荷が複数存在している場合



$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= -\int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i} \cdot d\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}\end{aligned}$$

電荷が連続的に分布している場合



$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

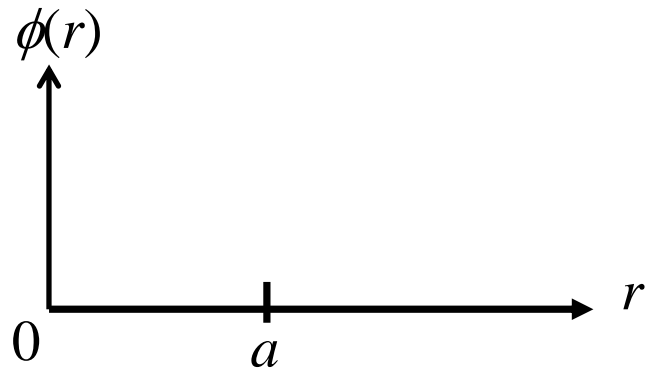
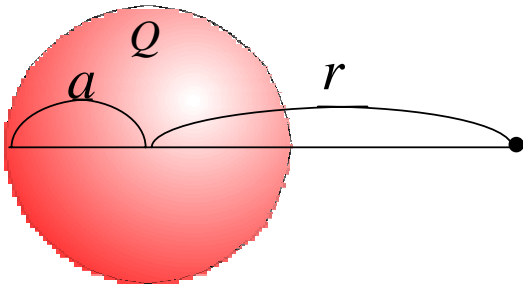
第1章レポート問題2

半径 a の球に電荷 Q が

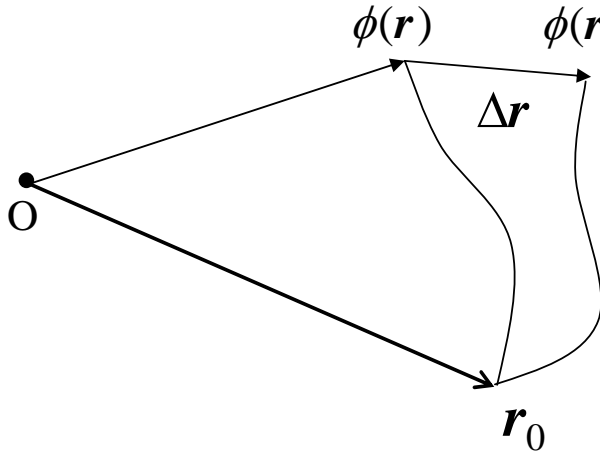
表面に一様に分布している場合

内部に一様に分布している場合

それぞれについて、球の中心からの距離 r の位置における電位を求め、横軸を r 、縦軸を $\phi(r)$ とするグラフに描け。



電位と電場の関係



$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) &= -\int_{r_0}^{r+\Delta r} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' + \int_{r_0}^r \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \\ &= -\left(\int_{r_0}^{r+\Delta r} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' + \int_r^{r_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \right) \\ &= -\int_r^{r+\Delta r} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'\end{aligned}$$

$\Delta\mathbf{r}$ が小さければ、 $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ は近似的に一定とみなせるので

$$\phi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) \cong -\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \int_r^{r+\Delta r} d\mathbf{r}' = -\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \Delta\mathbf{r}$$

$\phi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) \cong -\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \Delta\mathbf{r}$ を成分に分けて表すと

$$\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z) \cong -(E_x(\mathbf{r})\Delta x + E_y(\mathbf{r})\Delta y + E_z(\mathbf{r})\Delta z)$$

$y = z = 0$ として、両辺を x で割ると、

$$\frac{\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} \cong -E_x(\mathbf{r})$$

従って

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} \equiv \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial x} = -E_x(\mathbf{r})$$

y, z 成分に関しても同様に、

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial y} = -E_y(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial z} = -E_z(\mathbf{r})$$

以上の結果ををまとめると

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= (E_x(\mathbf{r}), E_y(\mathbf{r}), E_z(\mathbf{r})) = -\left(\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial x}, \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial y}, \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial z}\right) \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi(\mathbf{r})\end{aligned}$$

ここで次のような演算子を定義する

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \text{: ナブラ演算子}$$

これを用いれば、電場と電位の関係は、次のように簡単に表現できる:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$$

ナブラ演算子はスカラー関数にかかる場合「グラディエント(gradient)」(日本語では「**勾配**」)と読む

第1章レポート問題3

位置 r' に置かれた電荷がつくる電位

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

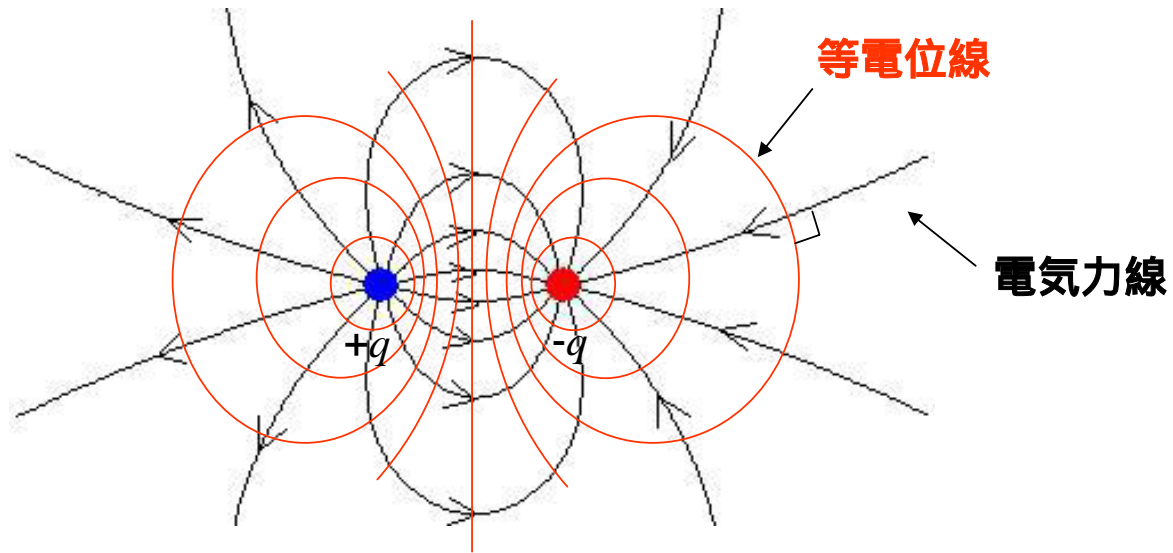
の勾配を計算することにより、この電荷が作る電場が

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}$$

となることを確認せよ。

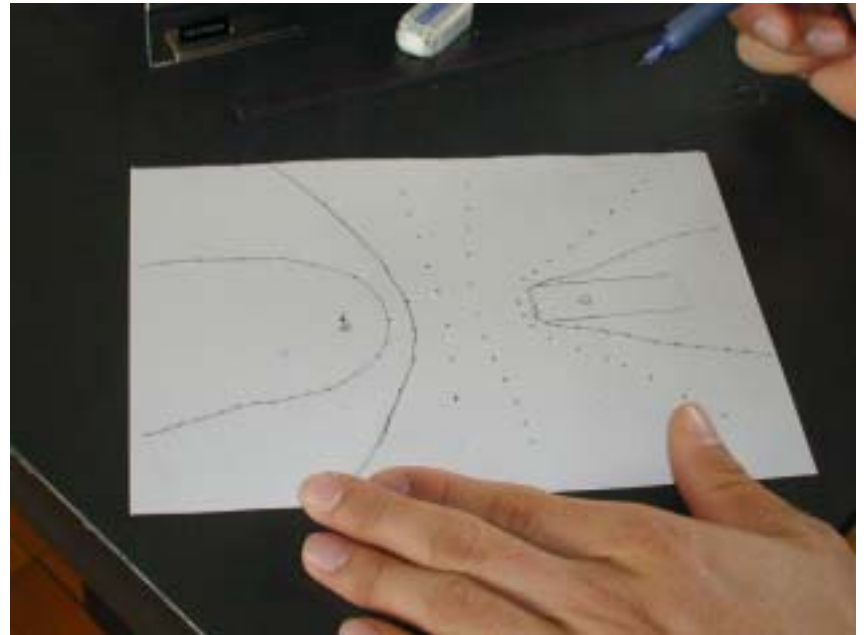
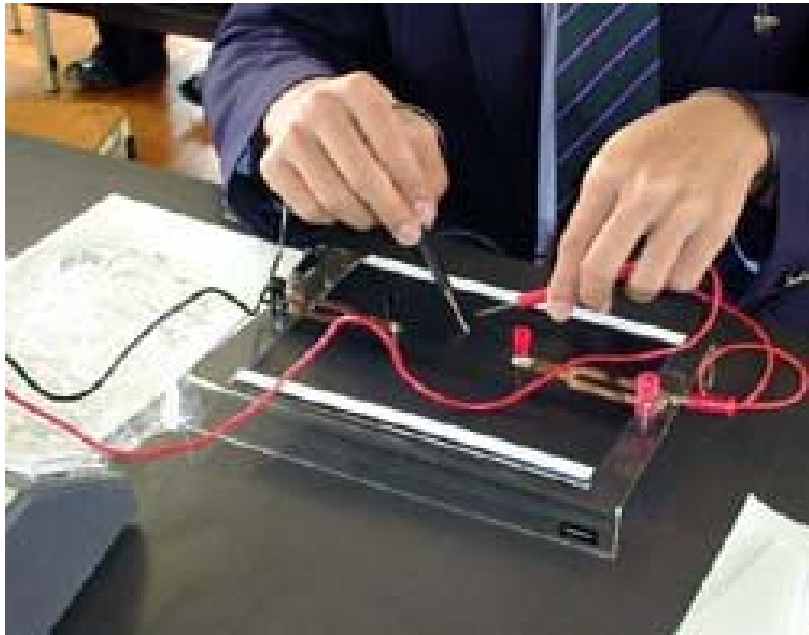
等電位面(線)

電位の等しいような面(線)のこと



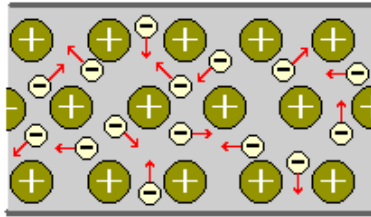
等電位面(線)と電気力線(電場)は必ず垂直である(さもなければ、等電位面(線)に沿った方向へ電荷を動かしたときの仕事がゼロにならず、等電位面(線)であることと矛盾してしまう)。

カーボン紙を用いた等電位線の作図



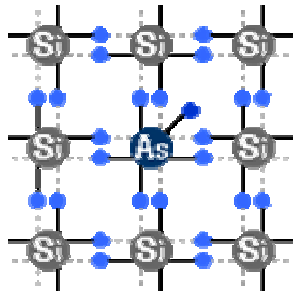
導体

自由に動くことのできる電子(自由電子)を持つ物体(おもに金属)

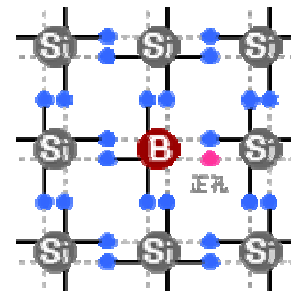


< 参考: 半導体 >

n型半導体では、電子(ドナー)が移動する



p型半導体では、正孔(アクセプター)が移動する



導体の性質

< 前提とする物理法則 >

電場があれば電子は動く (ニュートンの運動方程式)
電場はガウスの法則を満たす

(i) 導体の内部では電場はゼロ: $E(\mathbf{r}) = 0$

(ii) 導体の内部では電荷密度はゼロ: $\rho(\mathbf{r}) = 0$

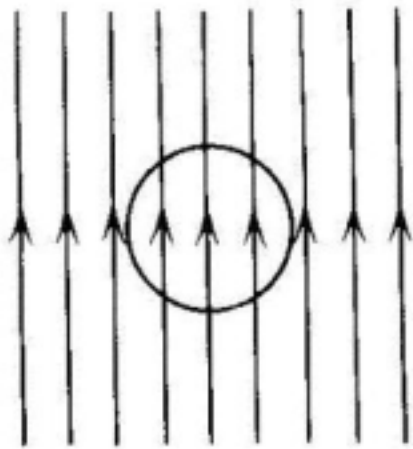
(iii) 電荷分布は(あるとすれば) 導体の表面にのみ現れる (静電誘導)

(iv) 導体の内部および表面の電位は一定: $\phi(\mathbf{r}) = \text{const}$

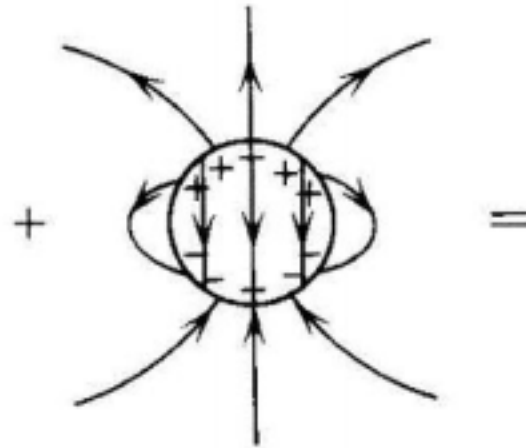
(v) 導体表面付近の電場は、**表面に垂直**である

(vi) 導体表面の面電荷密度が σ ならば、そのすぐ外側の電場の大きさは $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

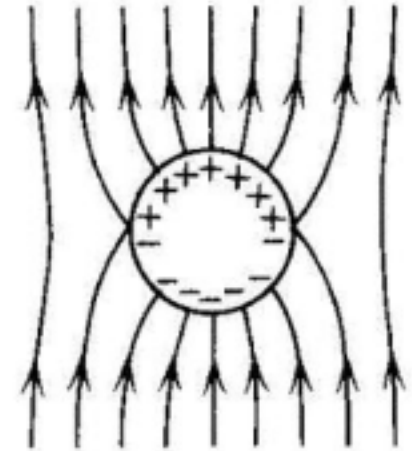
静電誘導



外部電場



静電誘導によって表面に生じた電荷が作る電場



実現される電場

導体の中に空洞がある場合

電荷が存在するとしたら空洞の内表面しかありえない。それを $q_{\text{内表面}}$ とすると、

$$q_{\text{内表面}} = \varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

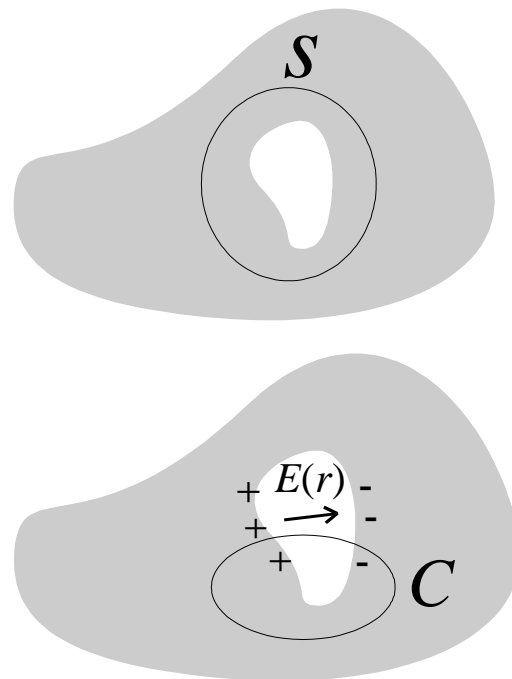
従って、もし内表面に電荷が存在するならば、図のように正負の電荷が同量存在しなければならない。このとき、空洞部分には電場が存在し、

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \oint_{\text{導体内}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \oint_{\text{中空部分}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \oint_{\text{中空部分}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \neq 0 \end{aligned}$$

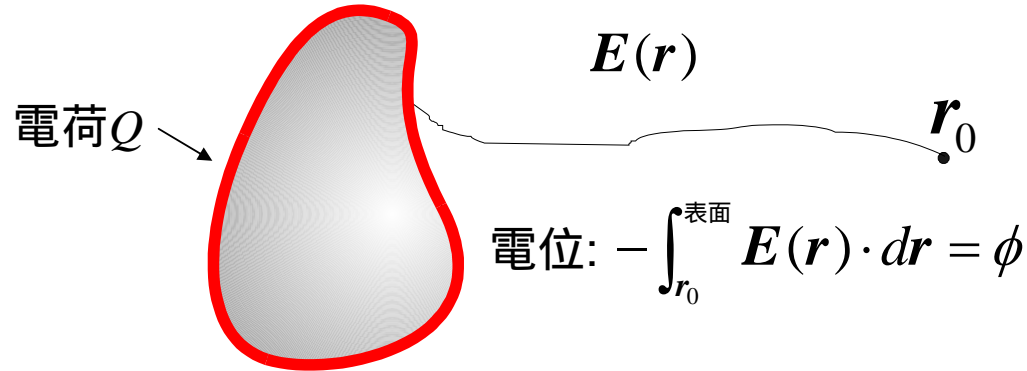
なる経路 C が存在する。これは $E(r)$ が保存場であることと矛盾する！！

空洞の内表面にも電荷は存在しない

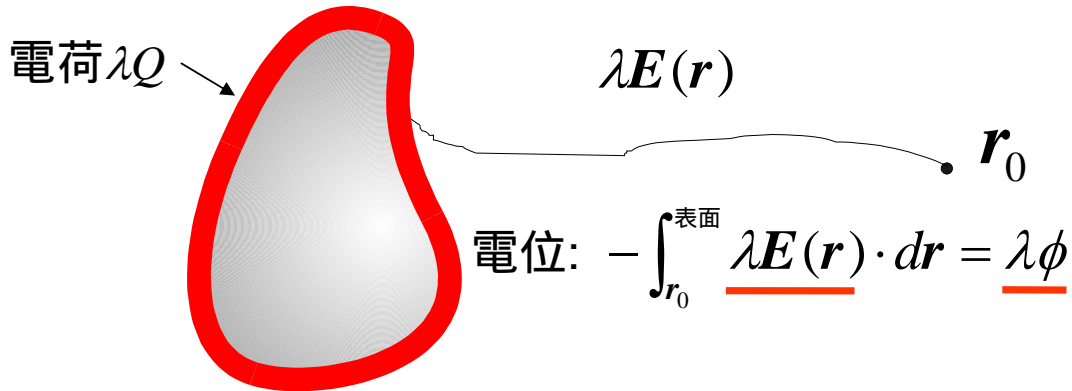
空洞部分には電場は存在しない(静電遮蔽)



導体の電位と電荷の関係



↓ 電荷を 倍



導体の電位は、帯電している電荷量に比例する

導体の静電容量

導体の電位と電荷の比例関係を

$$Q = C\phi$$

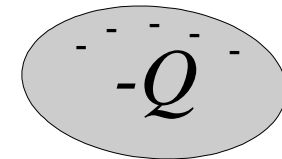
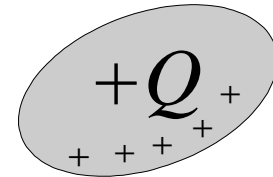
と表したときの比例定数 C を、その導体の**静電容量**という。
電気容量の単位は C/V であり、これを F (ファラッド)と定義する。

接近した2個の導体は**コンデンサー**と呼ばれる。
導体1,2に電荷 $\pm Q$ ($Q>0$)を帯電させた場合、

$$\phi_1 \propto Q \quad \phi_2 \propto Q$$

であるから、導体1,2の電位差 $V \equiv \phi_1 - \phi_2$
も電荷 Q に比例する。この関係を

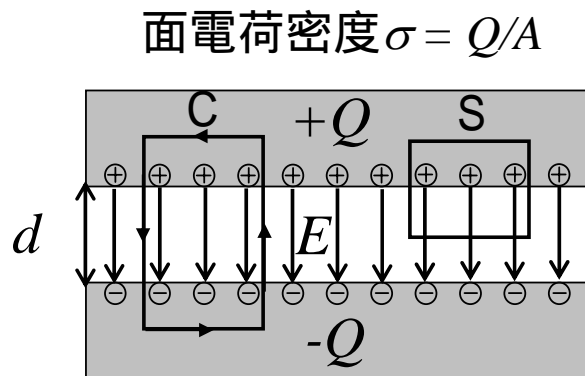
$$Q = CV$$



と書いたとき、 C をコンデンサーの**電気(静電)容量**と呼ぶ

平行平板コンデンサー

平板の寸法に比べ、平板の間隔 d が十分小さければ、平板の外部に漏れ出す電場の大きさは、平板内の電場の大きさに比べ無視できる。



経路Cにおける電場の循環はゼロ
平板間の電場の大きさ E は一樣

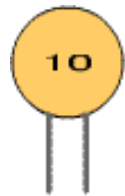
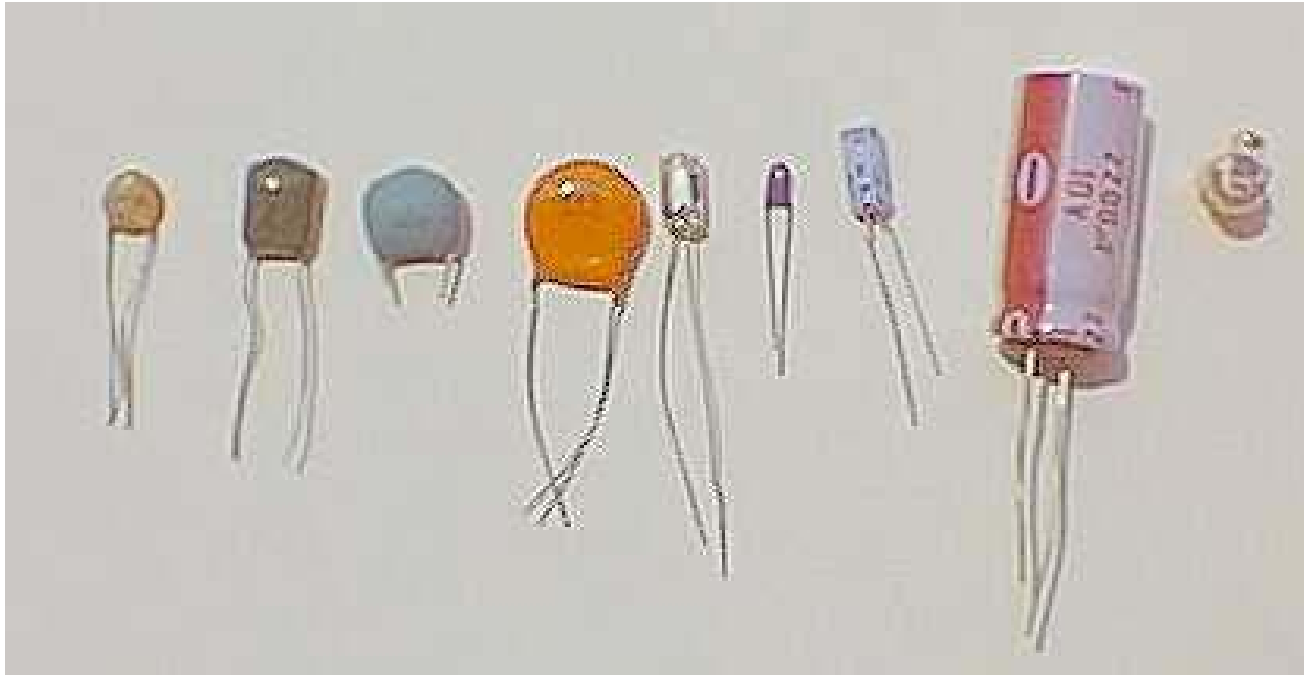
閉曲面Sにガウスの法則を適用
電荷の面密度は $\sigma = \epsilon_0 E$

$$Q = \sigma A, E = V/d \text{ より}$$

$$Q = \epsilon_0 \frac{A}{d} V$$

コンデンサーの電気容量

様々なコンデンサー



2桁の場合



3桁の場合

2桁の場合は、そのままpFの単位で読む

3桁()の場合は、 $\times 10$ pF

(例) 103の場合、 $10 \times 10^3 \text{pF} = 10 \text{nF}$

コンデンサーの充電

時刻 $t = 0$ にスイッチを入れる。

キルヒホッフの法則より

$$V - RI(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

電流と電荷の関係 $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ より、

$$\frac{dQ(t)}{dt} - \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{V}{R}$$

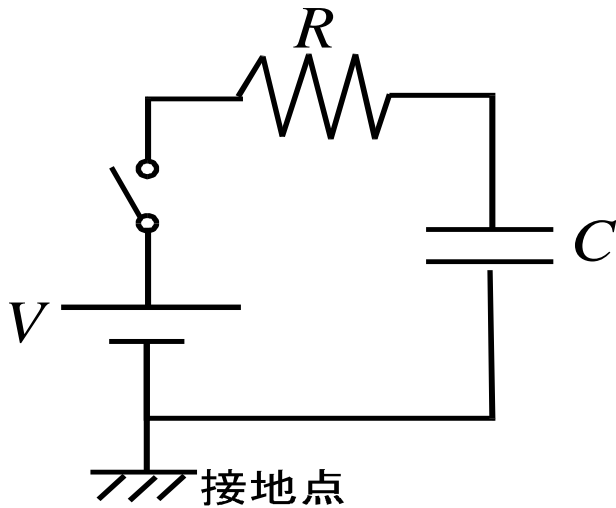
同次方程式 $\frac{dQ'(t)}{dt} - \frac{1}{RC}Q'(t) = 0$ の解は

$$Q'(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

また、特解は $Q_p(t) = CV$ なので、一般解は

$$Q(t) = Q'(t) + Q_p = Ae^{-\frac{t}{RC}} + CV$$

初期条件 $Q(0) = 0$ より、 $Q(t) = CV(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$



第1章レポート問題4

孤立した半径 a の導体球の電気容量 C を求めよ。また、この導体球の半径を1mとして、この導体球に1Cの電荷を帯電させるために必要な電池の電圧を求めよ。

電荷 Q_0 が帯電した静電容量 C のコンデンサーを時刻 $t=0$ に抵抗 R を介して放電する。後の時刻 t におけるコンデンサーの電荷量 $Q(t)$ を求め、グラフ化せよ。

静電エネルギー

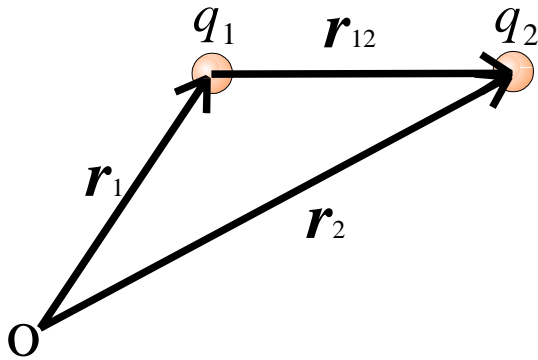
ある電荷分布を作り上げるのに必要なエネルギーを、その電荷分布の**静電エネルギー**と呼ぶ。

< 二個の点電荷の場合 >

電荷 q_1 を位置 r_1 に置く エネルギーはいらない

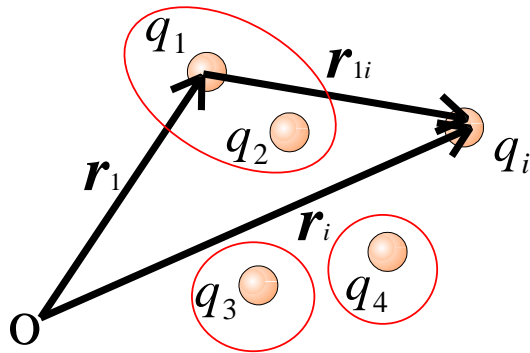
電荷 q_2 を位置 r_2 に置く

$$U = q_2 \phi_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$



静電エネルギー

< 複数の点電荷の場合 >



$$\begin{aligned} U &= q_2 \phi_1(\mathbf{r}_2) \\ &+ q_3 (\phi_1(\mathbf{r}_3) + \phi_2(\mathbf{r}_3)) \\ &+ q_4 (\phi_1(\mathbf{r}_4) + \phi_2(\mathbf{r}_4) + \phi_3(\mathbf{r}_4)) \\ &+ \dots \\ &= \sum_{i>j} q_i \phi_j(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i>j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \end{aligned}$$

$$\sum_{i>j} q_i \phi_j(\mathbf{r}_i) = \begin{array}{cccc} & q_1 \phi_2(\mathbf{r}_1) & q_1 \phi_3(\mathbf{r}_1) & q_1 \phi_4(\mathbf{r}_1) \\ q_2 \phi_1(\mathbf{r}_2) & & q_2 \phi_3(\mathbf{r}_2) & q_2 \phi_4(\mathbf{r}_2) \\ q_3 \phi_1(\mathbf{r}_3) & q_3 \phi_2(\mathbf{r}_3) & & q_3 \phi_4(\mathbf{r}_3) \\ q_4 \phi_1(\mathbf{r}_4) & q_4 \phi_2(\mathbf{r}_4) & q_4 \phi_3(\mathbf{r}_4) & \end{array}$$

ところで、

$$q_i \phi_j(\mathbf{r}_i) = q_j \phi_i(\mathbf{r}_j) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

より

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_i \phi_j(\mathbf{r}_i)$$

$q_1 \sum_{j \neq 1} \phi_j(\mathbf{r}_1)$	$q_1 \phi_2(\mathbf{r}_1)$	$q_1 \phi_3(\mathbf{r}_1)$	$q_1 \phi_4(\mathbf{r}_1)$
$q_2 \sum_{j \neq 2} \phi_j(\mathbf{r}_2)$	$q_2 \phi_1(\mathbf{r}_2)$	$q_2 \phi_3(\mathbf{r}_2)$	$q_2 \phi_4(\mathbf{r}_2)$
$q_3 \sum_{j \neq 3} \phi_j(\mathbf{r}_3)$	$q_3 \phi_1(\mathbf{r}_3)$	$q_3 \phi_2(\mathbf{r}_3)$	$q_3 \phi_4(\mathbf{r}_3)$
$q_4 \sum_{j \neq 4} \phi_j(\mathbf{r}_4)$	$q_4 \phi_1(\mathbf{r}_4)$	$q_4 \phi_2(\mathbf{r}_4)$	$q_4 \phi_3(\mathbf{r}_4)$

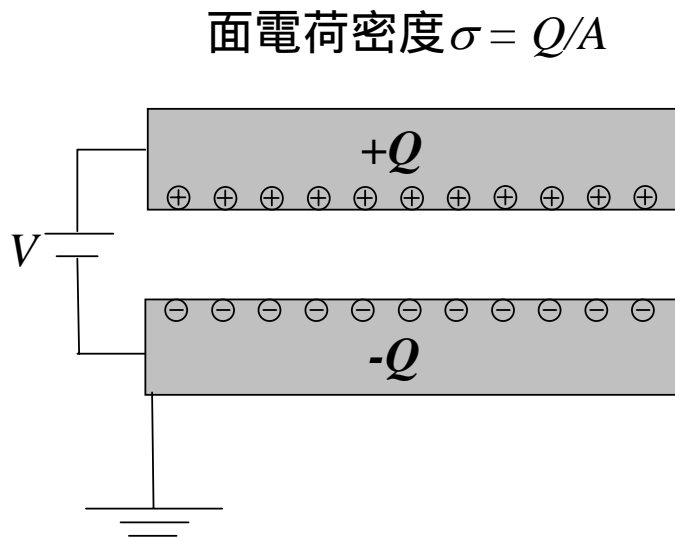
電荷 q_1, q_2, \dots が位置 \mathbf{r}_i に作る電位は、一般的に $\phi(\mathbf{r}_i) = \sum_{j \neq i} \phi_j(\mathbf{r}_i)$ と表せるので、

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi(\mathbf{r}_i)$$

これを連続的な電荷分布に拡張すると、

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV$$

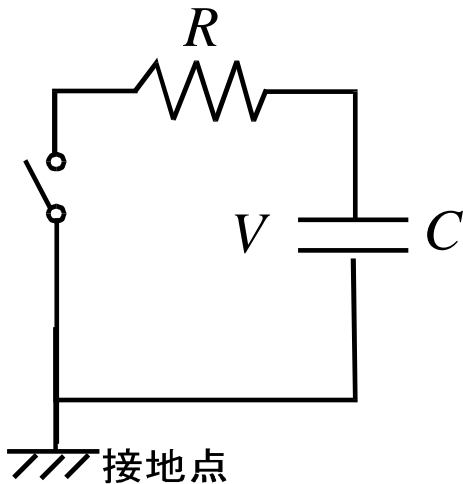
コンデンサーの静電エネルギー



$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int \sigma(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dS \\ &= \frac{1}{2} \sigma VA \\ &= \frac{1}{2} QV \left(= \frac{1}{2} CV^2 \right) \end{aligned}$$

コンデンサーの放電によって 放出されるエネルギー

電位差が V のコンデンサーを、時刻 $t = 0$ に放電させる。



$$I(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$U = \int_0^{\infty} RI^2(t) dt = \frac{V^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt$$

$$= \frac{V^2}{R} \left[-\frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} CV^2$$

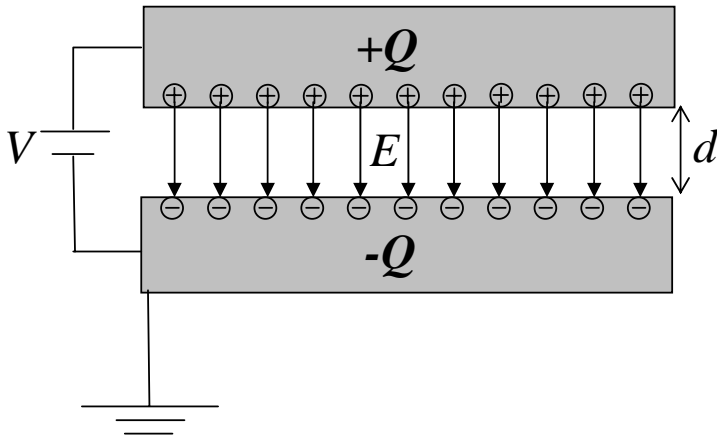
コンデンサーの静電エネルギー

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}, \quad V = Ed \quad \text{より}$$

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} (Ed)^2$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \times Ad$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \times (\text{電場の存在する体積})$$



エネルギー密度 $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ で静電エネルギーが空間に蓄えられている

第1章レポート問題5

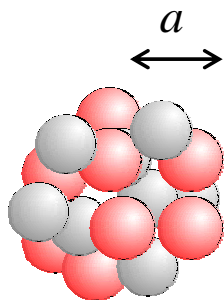
半径 a の導体球の表面に一様に電荷 Q が帯電している。
この導体の静電エネルギーを

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV$$

$$U = \int u dV = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int E^2 dV$$

の2通りで計算し、一致することを確認せよ。

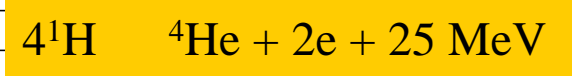
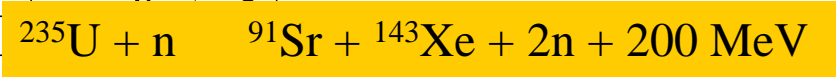
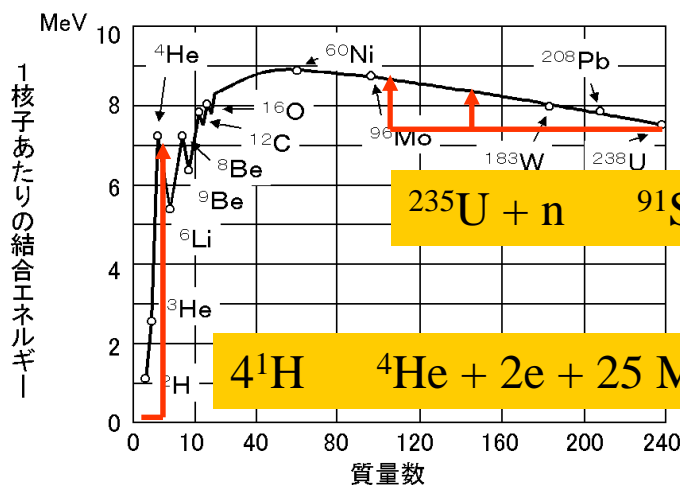
原子核の静電エネルギー



$$U = \frac{(eZ)^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5a} \quad a = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1.2 \times 10^{-15} \text{ m}$$

Z:原子番号
A:質量数

$$U = 1.15 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \times 10^{-13} \text{ J} = 0.72 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \text{ MeV}$$

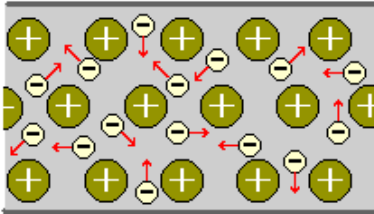


結合エネルギー

第2章

定常電流

電流密度



物質中の正電荷(陽子)の密度を $\rho_+(\mathbf{r}) (> 0)$
負電荷(電子)の密度を $\rho_-(\mathbf{r}) (< 0)$

正電荷、負電荷がそれぞれ平均速度 $\mathbf{v}_+(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{v}_-(\mathbf{r})$ で移動しているとき
電流密度は以下のように定義される:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho_+(\mathbf{r})\mathbf{v}_+(\mathbf{r}) + \rho_-(\mathbf{r})\mathbf{v}_-(\mathbf{r})$$

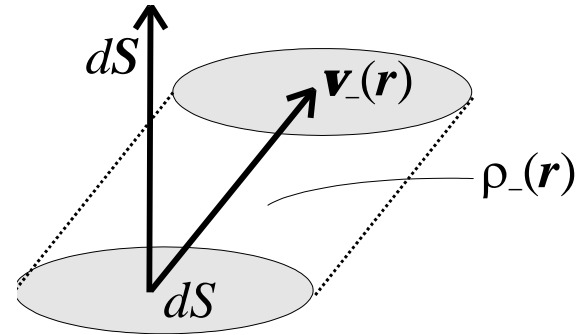
一般的な導体(金属)では、陽子(原子核)は移動せず、電子のみ移動するので

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho_-(\mathbf{r})\mathbf{v}_-(\mathbf{r})$$

電流

導体内のある面素 dS を単位時間に通過する電荷量は

$$\rho_-(\mathbf{r})\mathbf{v}_-(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$



導線(細長い導体)を流れる**電流**とは、導線のある断面 S を単位時間に通過する電荷量で定義される:

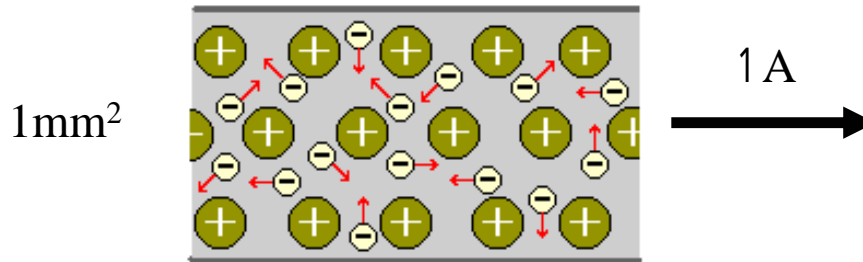
$$I = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

特に、導線内で電流密度が一定で、断面が電流密度に垂直な場合

$$I = j \int_S dS = jS$$

第2章レポート問題1

断面積が 1mm^2 の銅線に 1A の電流(一秒間に 1C の電荷)が流れている。銅線内の電流密度は一様と仮定して、銅線内の自由電子の移動する速さを求めよ。ただし、銅の密度は 8.93g/cm^3 、原子量は 63.5 、アボガドロ数は 6.02×10^{23} 、電気素量(電子の電荷)は 1.60×10^{-19} とし、銅原子1個あたり1個の自由電子を持つとする。



オームの法則

導体内の電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ は、その位置の電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 比例する (オームの法則)

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (\sigma : \text{電気伝導度、または電気伝導率})$$

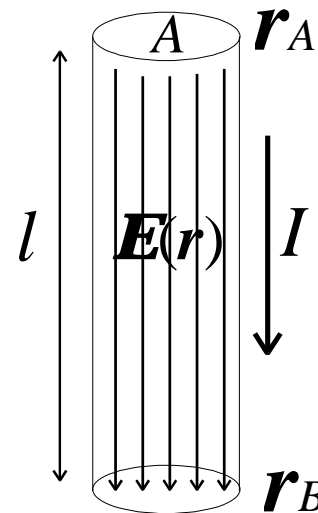
断面積 A 、長さ l 、電気伝導度 σ の導線に電流 I が流れているとき、位置 A (上流) からみた位置 B (下流) の電位 V は

$$V = - \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \frac{1}{\sigma} \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

$$= - \frac{j}{\sigma} \int_{r_A}^{r_B} dl = - \frac{j}{\sigma} l = - \frac{l}{\sigma A} I$$

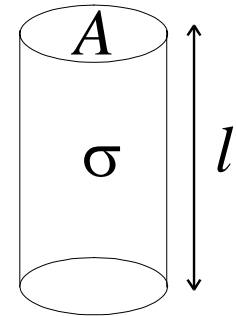
$$= \boxed{-RI} \left(R \equiv \frac{l}{\sigma A} \right)$$

↑
電圧降下



抵抗と抵抗率

$$R = \frac{V}{I} \quad \text{単位は}[V/A] = [\quad](\text{オーム})$$



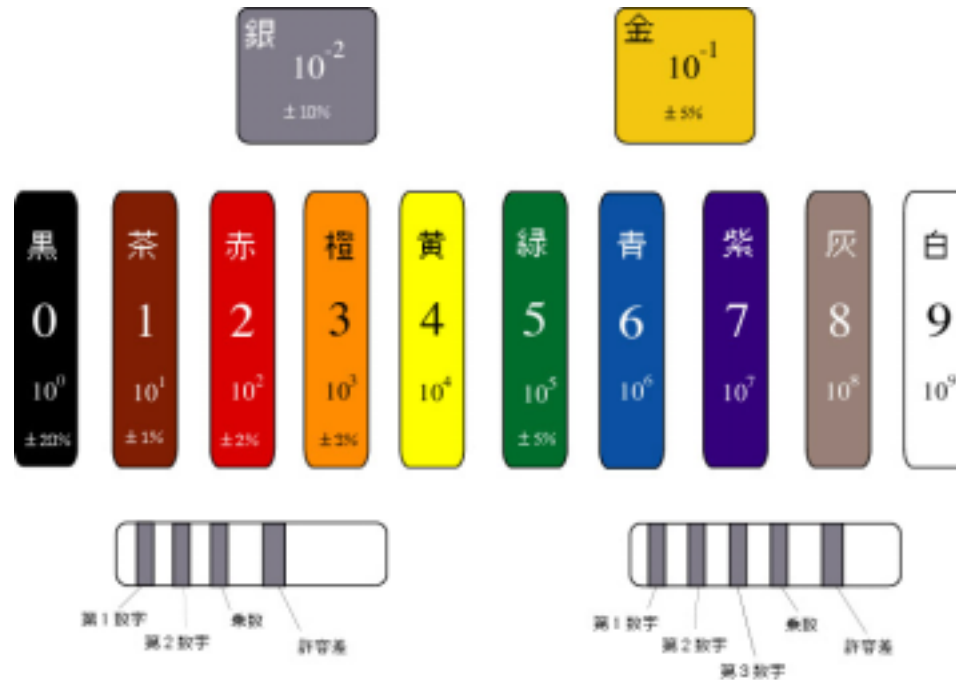
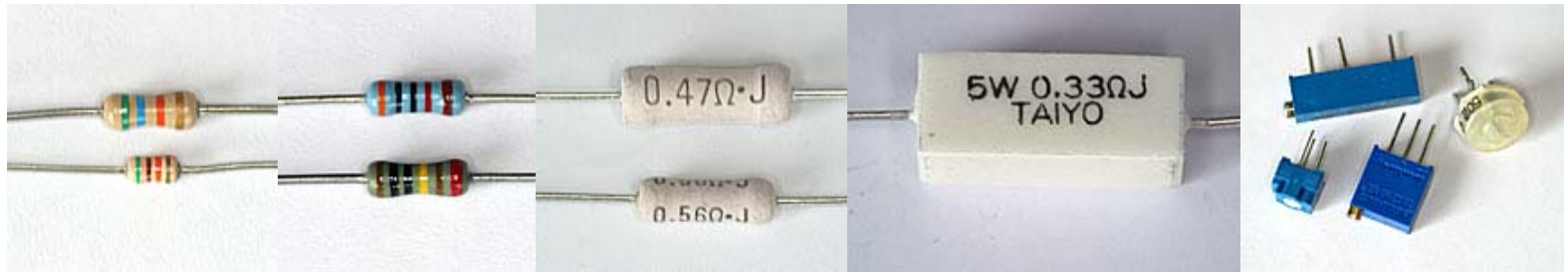
導体の抵抗は、長さに比例し、断面積Aに反比例する。

$$R = \frac{l}{\sigma A} = \rho \frac{l}{A}$$

$$\rho \equiv \frac{1}{\sigma} \quad [\quad \cdot \text{m}]: \text{抵抗率}$$

抵抗率 ($\Omega \cdot \text{m}$)	
金	2.0×10^{-8}
銀	1.5×10^{-8}
銅	1.7×10^{-8}
人体	約0.15
水道水	50 ~ 100
ガラス	$10^9 \sim 10^{11}$

(参考) 様々な抵抗とその読み方

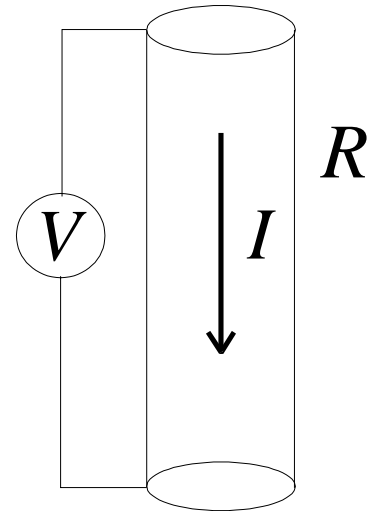


ジュール熱

抵抗体を流れる電荷が単位時間に
受ける仕事 P は、

$$P = VI = RI^2$$

P は**仕事率**(power)または**電力**と呼ばれ、
その単位は $\text{J/s} = \text{W}$ (ワット)



電荷になされた仕事は、電荷(導体では自由電子)と抵抗体中の原子や不純物との衝突を通して、抵抗体の熱エネルギー(**ジュール熱**)に変換される

電荷の保存則

閉曲面 S 内にある電荷の総和の単位時間あたりの変化量は

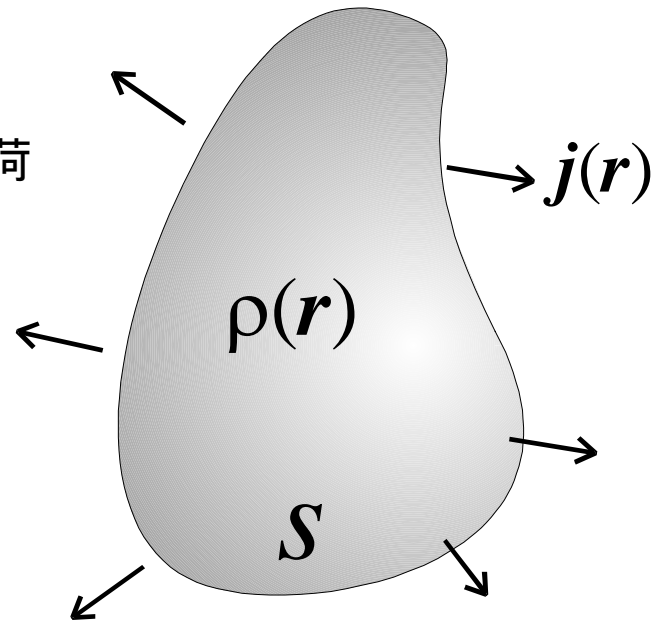
$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

閉曲面 S から単位時間あたり流出する電荷の総量は

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

電荷は保存するので、

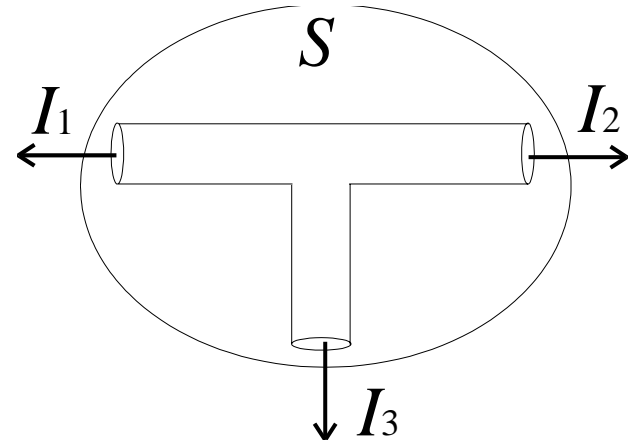
$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$



キルヒホフの第1法則

回路内の電荷分布は(あるとしても)時間変化しないので、

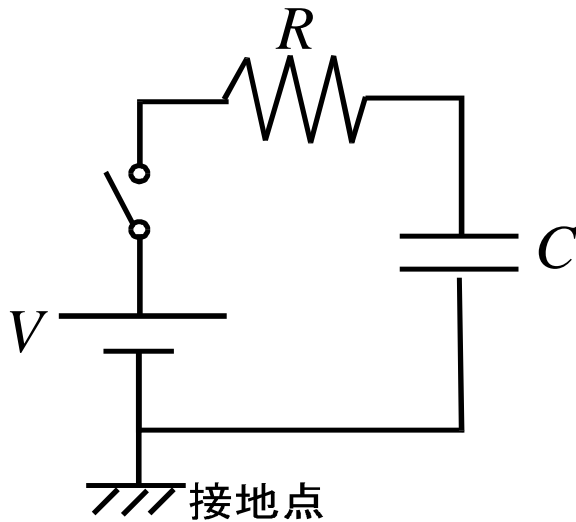
$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \sum_i I_i = 0$$



分岐点から流れ出る電流の総和はゼロになる:キルヒホフの第1法則

起電力とキルヒホフの第2法則

例) RC回路



$$V - RI(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

電場は保存場なので、循環はゼロ

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

積分する向きを電流の正の向きと定義して決めておくと

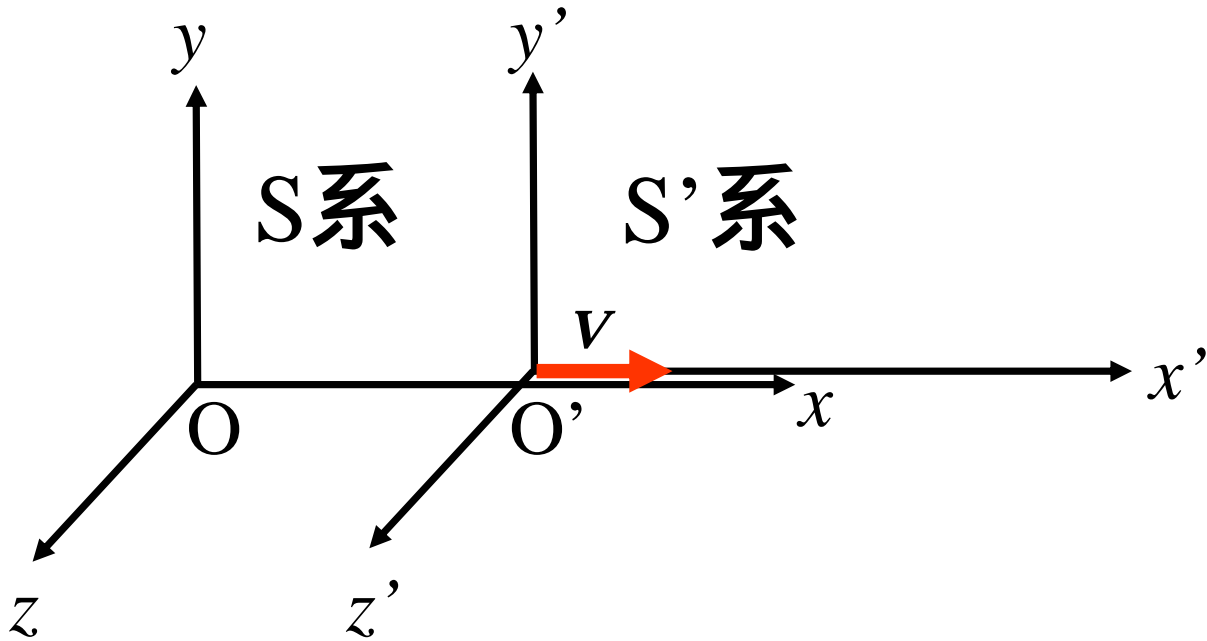
$$\begin{aligned} \sum_i V_i - \sum_j R_j I_j &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_i V_i &= \sum_j R_j I_j \end{aligned}$$

起電力の和は電圧降下の和に等しい

特殊相対性理論

(第3章「静磁場」への準備)

二つの慣性系



S'系はS系に対して x 軸正の方向に速さ v で移動している

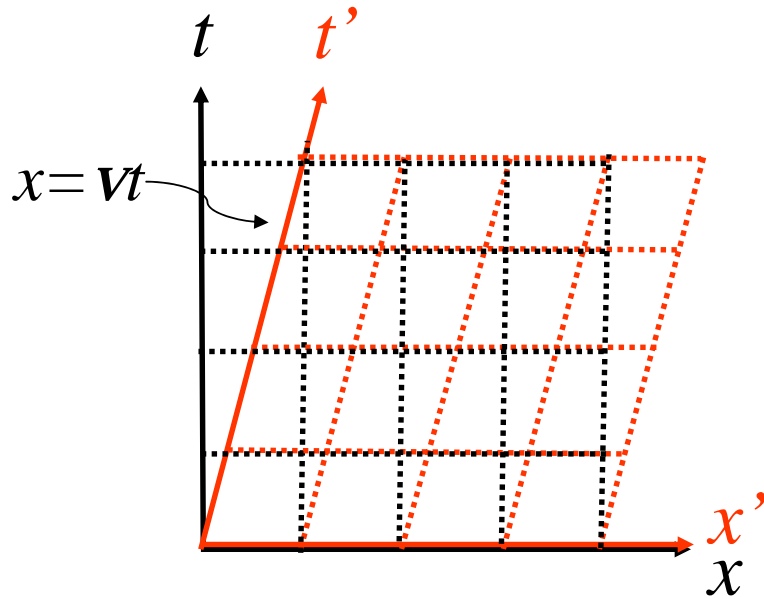
問題提起

- S系において時刻 t 、位置 x で起きた事象は、S'系においていつ(x')どこで(t')観測されるのだろうか？

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

(x, t) から (x', t') への写像 (一次変換行列) の具体形が知りたい。

我々の常識(ガリレイ変換)



S系とS'系には同じ
時間が流れている $\Rightarrow t' = t$

S系における $x=vt$ の
線が、S'系における $\Rightarrow x' = x - vt$
 $x' = 0$ の線

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

ガリレイ変換

ガリレイ変換の破綻

S系では時刻 $t = 0$ に位置 $x = 0$ より発せられた光は、1秒後 ($t = 1$) に位置 $x = c$ に到達する。

この現象をS'系でみると、

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - v \\ 1 \end{pmatrix}$$

S'系では1秒後 ($t' = 1$) に位置 $x' = c - v$ に到達する。
従って、S'系での光速は $c - v$ 。

地球上の光速は光の進行方向に依存しないという
マイケルソン-モーレーの実験(1887年)と矛盾！

特殊相対性理論 (A. Einstein, 1905)

<二つの基本原理>

- 物理法則はすべての慣性系に対して同じ形で表される(相対性原理)
- 真空中の光の速さは光源の運動状態に無関係である(光速不変の原理)

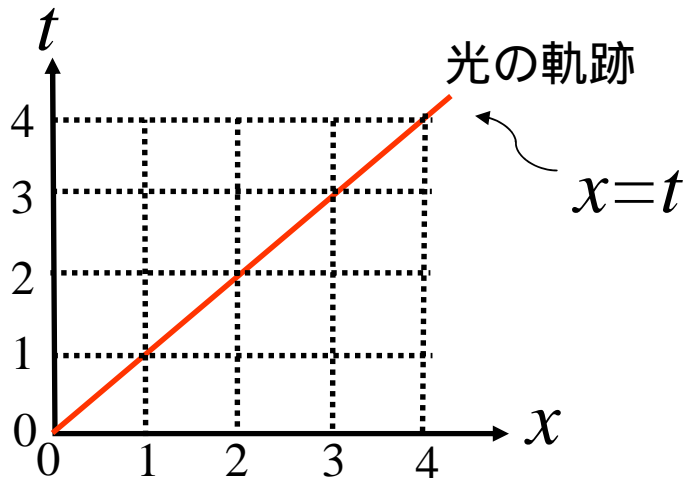
我々 (Einstein) の目標

相対性原理と光速不変の原理を同時に満たすような、S系とS'系間の時空座標の一次変換行列を新たに求める。

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

準備：時間の単位の再定義

後の議論を簡単にするため、 $1/c$ 秒を、あらためて1秒と定義し、光は1秒間に1m進むものとする。
(光速を1 m/秒とする)



注) 元の単位に戻るには、 $t \rightarrow ct$, $v \rightarrow \frac{v}{c}$
と置き換えればよい

条件 その1 (光速不変の原理)

S系では時刻 $t = 0$ に位置 $x = 0$ より発せられた光は、1秒後 ($t = 1$) に位置 $x = 1$ に到達する。この現象をS'系で観測すると、

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ c + d \end{pmatrix}$$

S'系での光速も1であるから

$$\frac{x'}{t'} = \frac{a + b}{c + d} = 1$$

$$\therefore a + b = c + d \dots$$

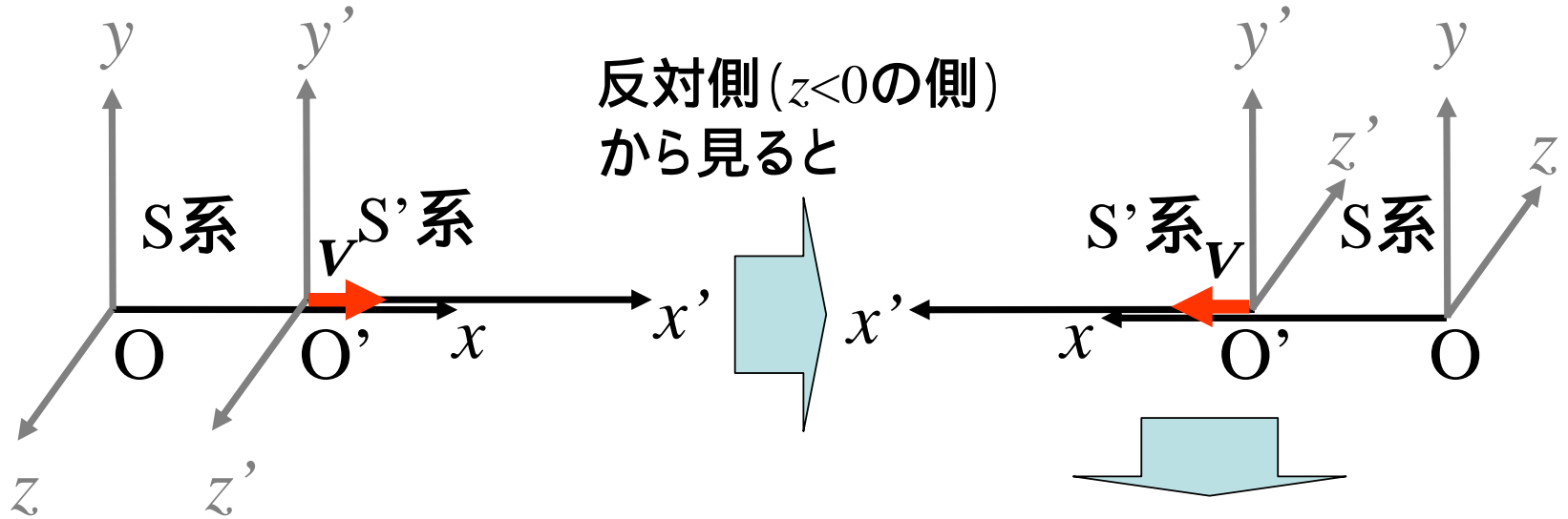
条件 その2 (相対速度)

S'系の原点 ($x' = 0$) は、S系から見て速度 v で動いている。したがって、S系の時空座標 $(x, t) = (v, 1)$ のS'系における x' 座標は0である (t' 座標は不明)

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ? \end{pmatrix}$$

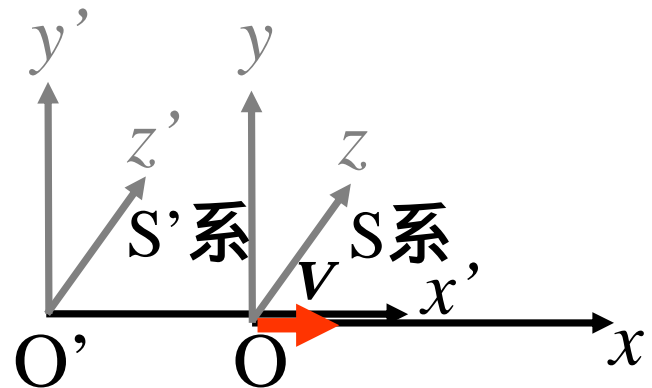
$$\therefore av + b = 0 \dots$$

見方を変える



x, x' 軸の正の向きを逆に定義すると、 S 系と S' 系の立場が入れ替わる！

更に x, x' 軸の正の向きを逆に定義すると



条件 その3 (相対性原理)

S'系がS系に対してx軸正の方向に速度vで移動している状況は、(x, x'軸の正の向きを逆に定義すれば)S系がS'系に対してx'軸正の方向に速度vで移動しているとみなすこともできる。どちらの見方でも、相対性原理により、物理法則(つまり一次変換行列)は同じはずである。

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} & \xrightarrow[\begin{matrix} x \rightarrow -x \\ x' \rightarrow -x' \end{matrix}]{} & \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} \\ & & \swarrow \text{同じ} \searrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

ここで x, x' 軸の正の向きを逆に定義すると

$$\begin{pmatrix} -x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x' \\ t' \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

以上、まとめると、

$$a + b = c + d \dots \quad (\text{光速不変の原理})$$

$$av + b = 0 \dots \quad (\text{相対速度で決まる条件})$$

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \dots \quad (\text{相対性原理})$$

、 、 より

$$a = d = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad b = c = -\frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

現実(SI単位系)に戻ろう。

$t \rightarrow ct, \quad v \rightarrow \frac{v}{c}, \quad t' \rightarrow ct', \quad v' \rightarrow \frac{v'}{c}$ の置き換えをすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

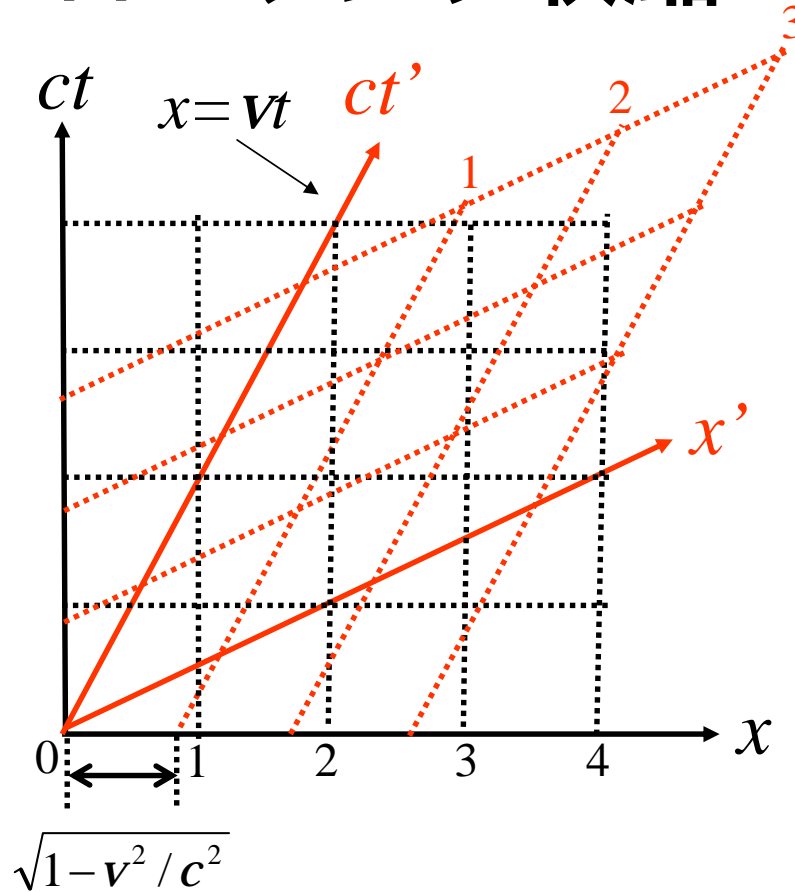
ローレンツ変換

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

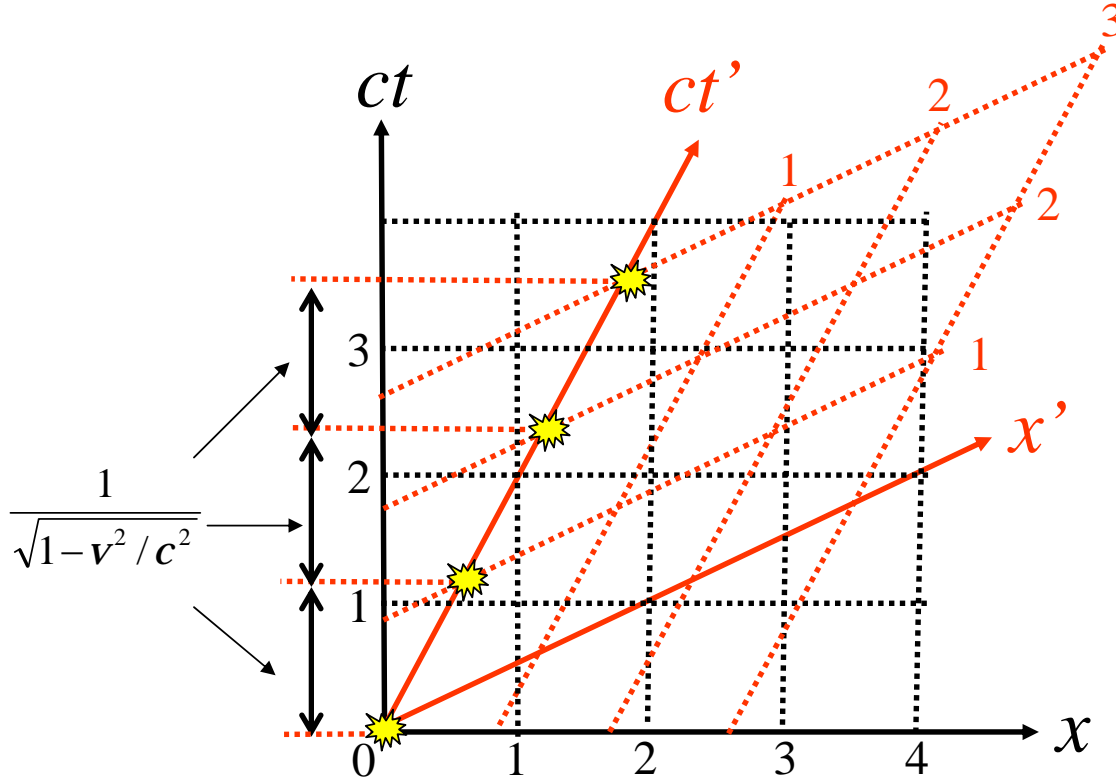
ローレンツ逆変換

ローレンツ収縮



S' 系で長さ L の物体は、 S 系では長さが $L\sqrt{1 - v^2/c^2} (< L)$ に見える

時間の遅れ



S'系で $x'=0$ にある
フラッシュランプは、
S'系の時計では1秒
おきに点灯。

S系の時計では

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (> 1)$$

秒おきに点灯。

S'系の時間は、S系からみると $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (> 1)$ 倍遅く流れて
いるように見える

第3章

静磁場

ローレンツ力 (復習)


速度 \mathbf{v} で運動している電荷 q が位置 \mathbf{r} で受ける力は

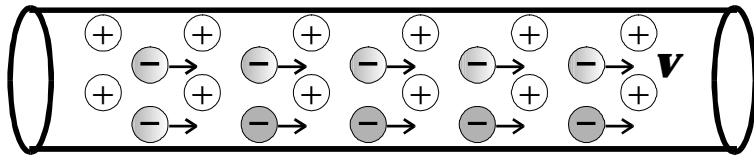
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}))$$

と表せることが経験的にわかっている。この電荷に働く力をローレンツ力と呼び、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ を電場、 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ を磁場と定義する。

力の起源：電場or磁場？

$$F = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$


$B \otimes$ q  $\rightarrow \mathbf{v}$

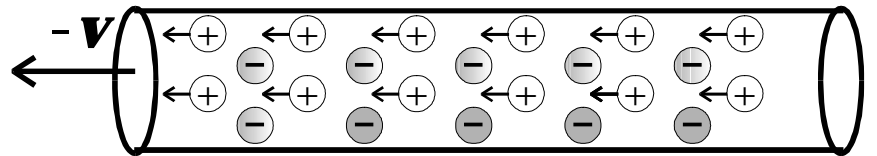


S系 $I \leftarrow$

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$$

$$F' = ?$$

$B \otimes$ q 



S'系 $I \leftarrow$

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = ?$$

ローレンツ収縮による導線の帯電

S系では、自由電子は速度 v で動いているので、自由電子の平均的間隔は止まっている場合(S'系)の間隔の $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 倍にローレンツ収縮している

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Leftrightarrow \rho'_- = \rho_- \sqrt{1-v^2/c^2} \cong \rho_- \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

S'系では、原子核は速度 v で動いているので、原子核の平均的間隔は止まっている場合(S系)の間隔の $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 倍にローレンツ収縮している

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cong \rho_+ \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

従って、

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- \cong \rho_+ \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) + \rho_- \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) = \rho_+ \frac{v^2}{c^2}$$

S系において、電荷 q に働く力は、狭義のローレンツ力

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -qv\mathbf{e}_I \times \mathbf{B}$$

S'系において、電荷 q に働く力は、クーロン力

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}' = \frac{q\rho'A}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\rho_+ vA}{r} v\mathbf{e}_r = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I}{r} v\mathbf{e}_r$$

両者は同じであろうから(電荷はどちらの系でも上向きに加速されるから)、

$$-qv\mathbf{e}_I \times \mathbf{B} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I}{r} v\mathbf{e}_r$$

$\mathbf{B} \perp \mathbf{e}_I$ と仮定すると

$$\mathbf{B}(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I}{r} \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_r$$

近似を用いない厳密な議論は
ファインマン物理学III「電磁気学」
p166 (電磁場の相対性)を参照のこと

電流が作る磁場

$$\mathbf{B}(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I}{r} \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_r$$

ここで定数 $\mu_0 \equiv \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$ を導入すると、

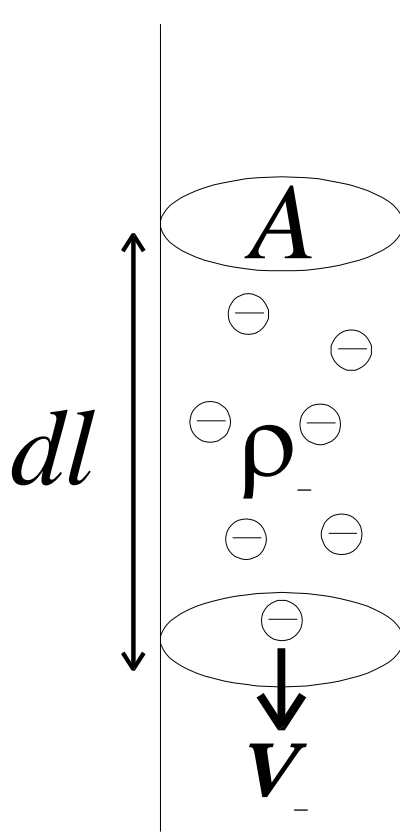
$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_r$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m : 真空の透磁率(定義値)

$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.8541878 \times 10^{-12}$ F/m : 真空の誘電率(定義値)

(真空中の光速: $c = 299,792,458$ m/s(定義値))

電流に働くローレンツ力

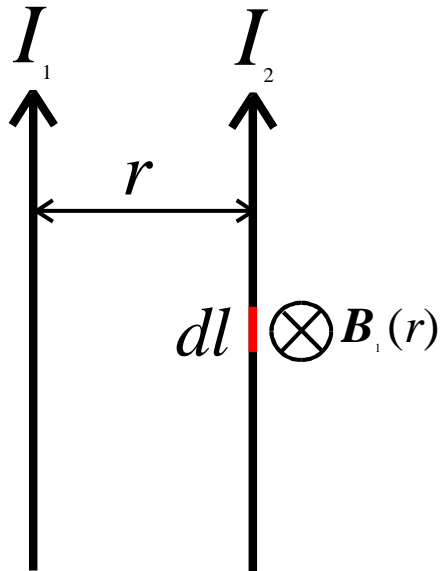


$$\mathbf{v}_- = \frac{\mathbf{j}}{\rho_-} = \frac{I}{\rho_- A} \mathbf{e}_I$$

$$dQ = \rho_- A dl$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= dQ \mathbf{v}_- \times \mathbf{B} = \rho_- A dl \frac{I}{\rho_- A} \mathbf{e}_I \times \mathbf{B} \\ &= \mathbf{I} \times \mathbf{B} dl \quad (\mathbf{I} = I \mathbf{e}_I) \end{aligned}$$

電流間に働く力



$$\mathbf{B}_1(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r} \mathbf{e}_{I_1} \times \mathbf{e}_r$$

$$d\mathbf{F} = \mathbf{I}_2 \times \mathbf{B}_1 dl$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} \mathbf{e}_{I_2} \times (\mathbf{e}_{I_1} \times \mathbf{e}_r) dl$$

$$= -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} (\mathbf{e}_{I_1} \cdot \mathbf{e}_{I_2}) \mathbf{e}_r dl$$

電流が同じ(逆)向きなら、引力(斥力)

$$I_1 = I_2 = 1 \text{ A}, r = dl = 1 \text{ m}$$

$$|d\mathbf{F}| = \frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \times 10^{-7} \text{ N (電流の定義)}$$

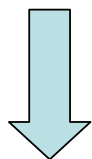
電場と磁場の法則のアナロジー

クーロンの法則

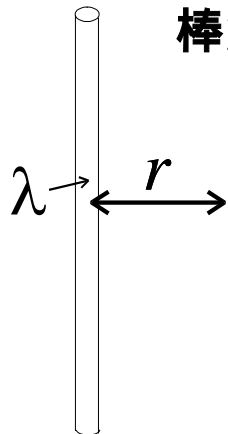
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dl$$

ビオ・サバールの法則

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dl$$



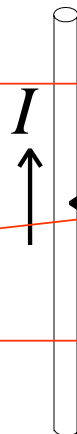
線電荷密度 λ の無限に長い棒が作る電場



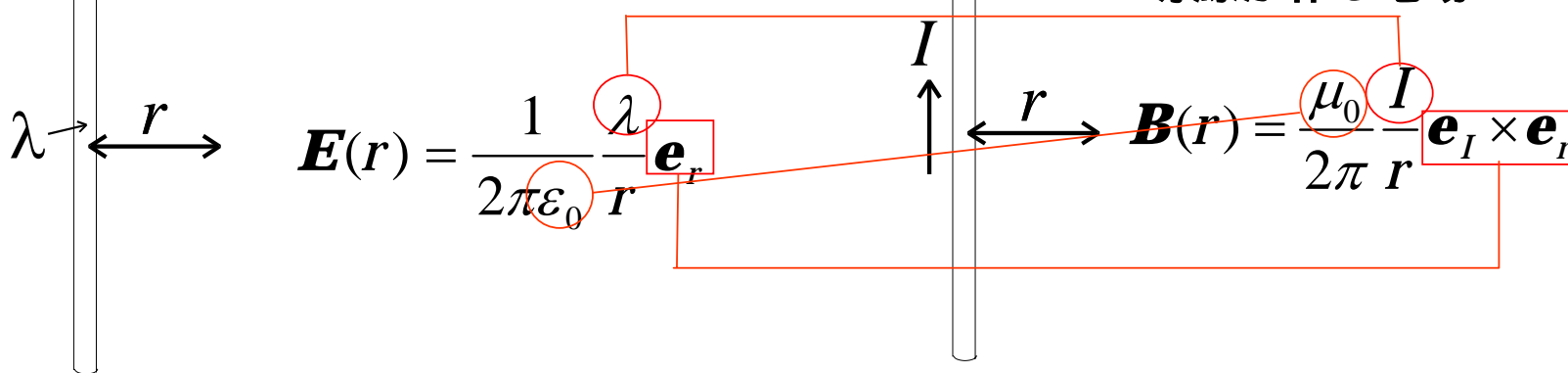
$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \mathbf{e}_r$$



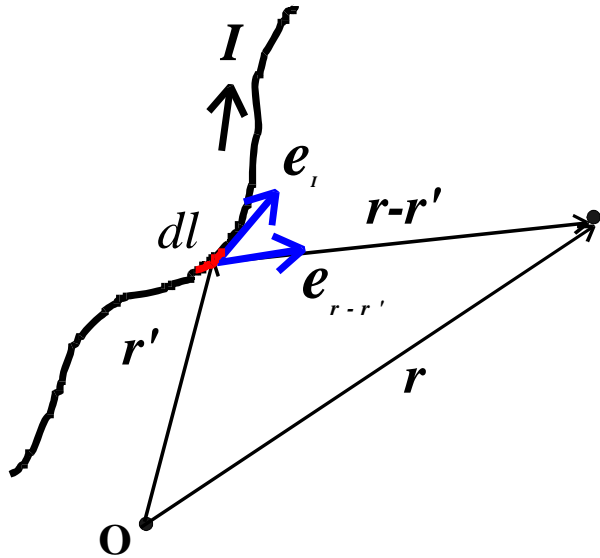
電流Iの無限に長い導線が作る電場



$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_r$$



ビオ・サバールの法則



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dl$$

$d\mathbf{I} \equiv I \mathbf{e}_I dl$ と定義すれば、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{I} \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$$

連続的な電流分布への拡張

クーロンの法則

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dl$$

$$\lambda dl \leftrightarrow \rho(\mathbf{r}') dV'$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dV'$$

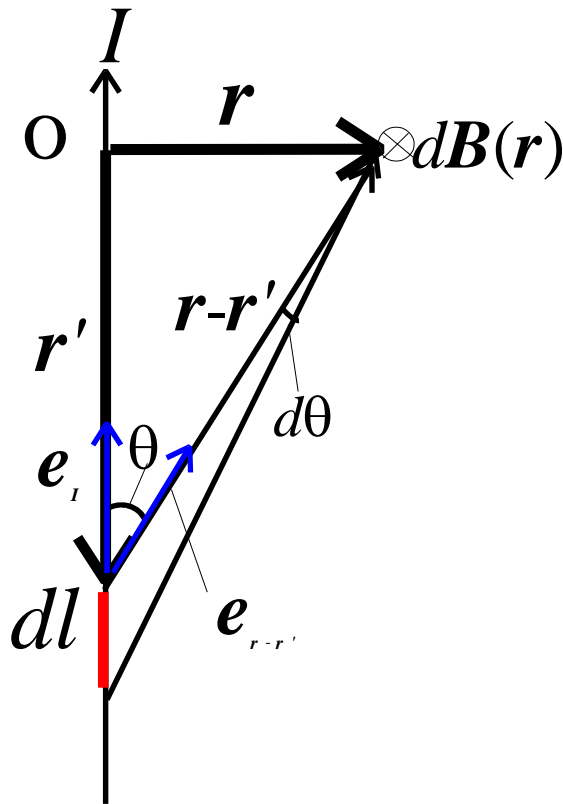
ビオ・サバールの法則

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dl$$

$$I \mathbf{e}_I dl \leftrightarrow \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dV'$$

無限に長い直線電流の作る磁場



$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_{r-r'}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} dl$$

$$\mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_{r-r'} = \mathbf{e}_\varphi \sin \theta \quad |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \equiv R$$

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin \theta dl}{R^2} \mathbf{e}_\varphi$$

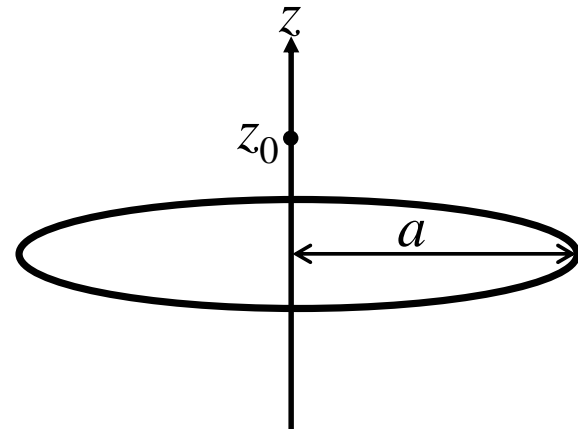
$$\sin \theta dl = R d\theta \quad \sin \theta = r / R$$

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{r} \mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r} \mathbf{e}_\varphi d\theta = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \mathbf{e}_\varphi$$

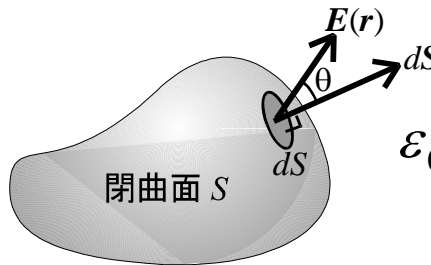
第3章レポート問題1

半径 a の円形回路に、電流 I が流れている。
円の中心における磁場の大きさをビオ -
サバールの法則を用いて計算せよ。
余裕のあるものは、この円形回路の中心
軸(z 軸)上の任意の位置 $z = z_0$ における磁
場の大きさを求めよ。



ガウスの法則とアンペールの法則

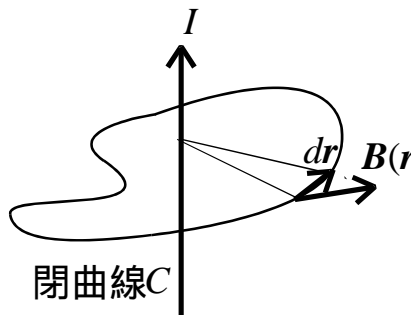
ガウスの法則



閉曲面 S

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & (\text{電荷 } q \text{ が閉曲面 } S \text{ の外部にある場合}) \\ q & (\text{電荷 } q \text{ が閉曲面 } S \text{ の内部にある場合}) \end{cases}$$

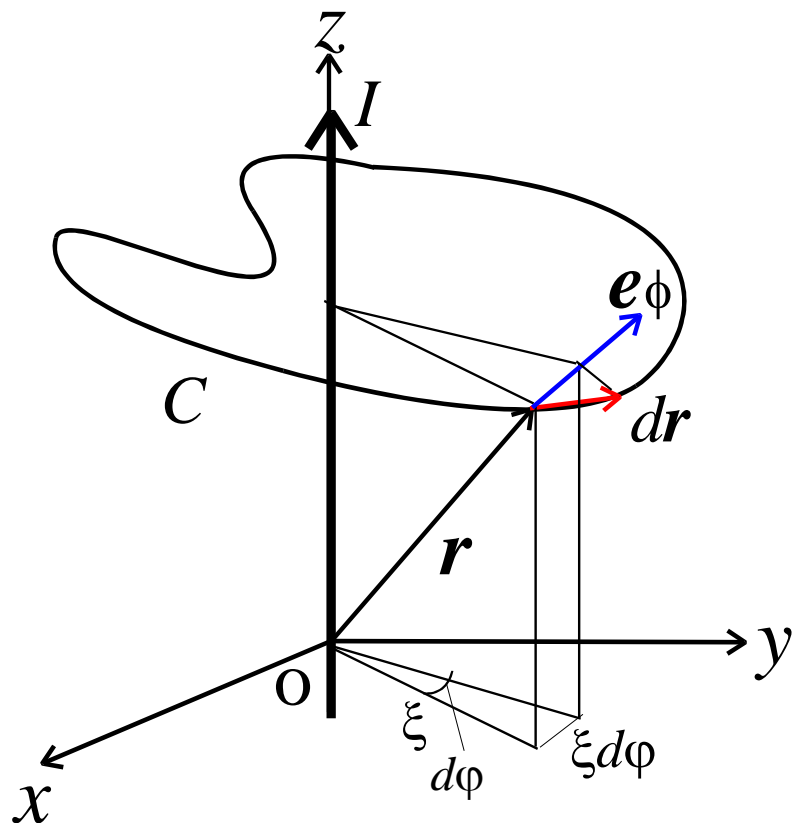
アンペールの法則



閉曲線 C

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \begin{cases} 0 & (\text{閉曲線 } C \text{ が電流 } I \text{ を絡まない場合}) \\ \mu_0 I & (\text{閉曲線 } C \text{ が電流 } I \text{ を絡む場合}) \end{cases}$$

無限に長い直線電流の場合



電流が作る磁場は、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\xi} \mathbf{e}_\phi$$

よって、経路Cにおける循環は、

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I \oint_C \frac{1}{2\pi\xi} \mathbf{e}_\phi \cdot d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{e}_\phi \cdot d\mathbf{r} = \xi d\phi \text{ と表せるので}$$

$$\mu_0 I \oint_C \frac{1}{2\pi\xi} \xi d\phi = \mu_0 I \oint_C \frac{d\phi}{2\pi}$$

アンペールの法則

複数の電流回路がある場合

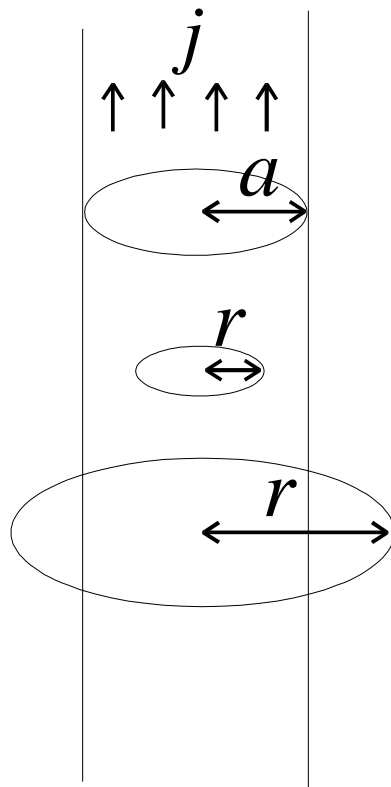
$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \sum_{\text{経路 } C \text{ が絡む}} I_i$$

電流が電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ で分布している場合

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

アンペールの法則の応用例

半径 a の無限に長い円柱状導体内を一様な電流密度 j で流れる電流が作る磁場

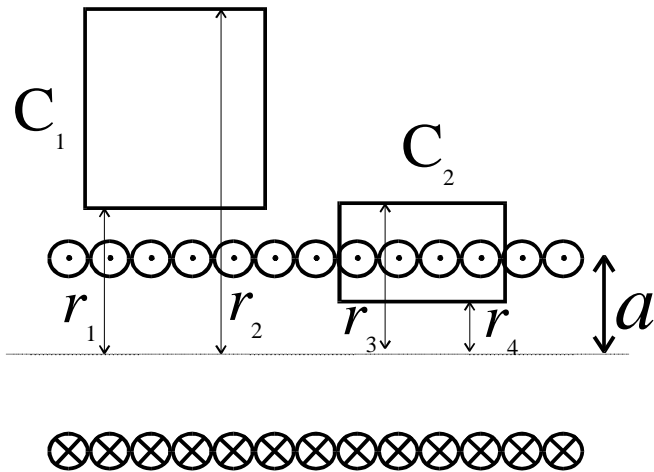


i) $0 \leq r \leq a$ の場合

ii) $r > a$ の場合

アンペールの法則の応用例

1 mあたりの巻き数が n である半径の無限に長いソレノイドコイルに、電流 I を流したときにできる磁場

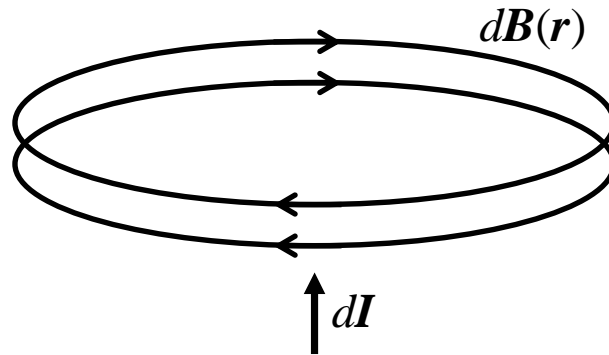


第3章レポート問題2

ソレノイドコイルの中心の磁場の大きさを、
ビオ・サバールの法則を用いて計算せよ
(第3章レポート問題1参照)。アンペールの
法則を用いて得られた結果と一致した
か？

磁場の湧き出し

ビオ・サバルの法則より、電流要素 dI は回転対称な(トーラス型の)磁場を作る



どのような閉曲面 S をとっても、 $\int_S d\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$

磁場の重ね合わせの原理より、一般に $\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$

これまでのまとめ

時間変化しない電磁場(静電場、静磁場)の基本法則

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \quad (\text{ローレンツ力})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dV' \quad (\text{クーロンの法則})$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV & (\text{電場のガウスの法則}) \\ \oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 & (\text{循環ゼロの法則}) \\ \text{境界条件 (無限遠で電場がゼロに収束)} \end{cases}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dV' \quad (\text{ビオ - サバルの法則})$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} & (\text{アンペールの法則}) \\ \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0 & (\text{磁場のガウスの法則}) \\ \text{境界条件 (無限遠で磁場がゼロに収束)} \end{cases}$$

微分系への準備

その 1 : ガウスの定理

$$\int_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) dV$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\partial v_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial v_y(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial v_z(\mathbf{r})}{\partial z} (\equiv \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{r}))$$

「 $\nabla \cdot$ 」または「div」は「ダイバージェンス(divergence)」と読む

微分系への準備

その ① : ストークスの定理

$$\oint_C \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv \left(\frac{\partial v_z(\mathbf{r})}{\partial y} - \frac{\partial v_y(\mathbf{r})}{\partial z}, \frac{\partial v_x(\mathbf{r})}{\partial z} - \frac{\partial v_z(\mathbf{r})}{\partial x}, \frac{\partial v_y(\mathbf{r})}{\partial x} - \frac{\partial v_x(\mathbf{r})}{\partial y} \right)$$

($\equiv \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r})$)

「 \times 」または「rot」は「ローテーション (rotation)」と読む

ガウスの法則の微分形

ガウスの定理 (数学)

ガウスの法則 (物理)

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV$$

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

任意の体積 V で上の式が成り立つためには、積分の中身は同じでなければならないので、

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

アンペールの法則の微分形

ストークスの定理 (数学)

アンペールの法則 (物理)

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_V (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

任意の閉曲面 S で上の式が成り立つためには、積分の中身は同じでなければならないので、

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

静電磁場の基本法則

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}))$$

< 微分形 >

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

< 積分形 >

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

マクスウェル方程式

時間変化する電磁場の基本方程式

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

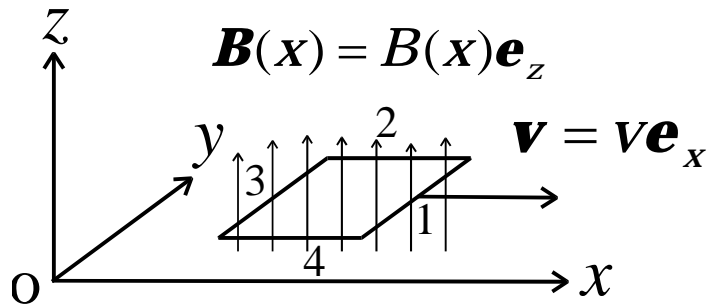
第4章

時間変化する電磁場

電磁誘導

導体内の電荷 q が受けるローレンツ力は

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(x) = qvB(x)\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z \\ &= -qvB(x)\mathbf{e}_y\end{aligned}$$



回路を一周する向きは、磁場の方向(今は z 軸)に対して右ねじの向きと約束する。

単位電荷が一辺の長さが a の回路を一周する際に受ける仕事 W 、を考える。

$$dW_1 = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -vB(x_1)a$$

$$dW_2 = 0$$

$$dW_3 = vB(x_3)a$$

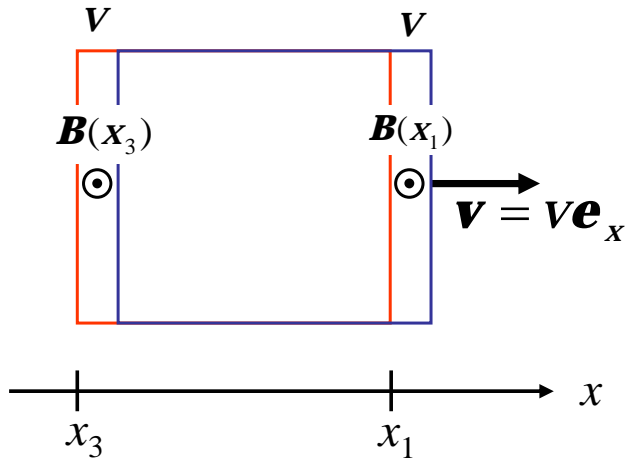
$$dW_4 = 0$$

よって、この回路に生じる誘導起電力 V は、

$$V = dW_1 + dW_3 = -va(B(x_1) - B(x_3))$$

誘導起電力

この回路を右ねじの向きに貫く磁束



$$\Phi \equiv \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

単位時間あたりの変化量は、

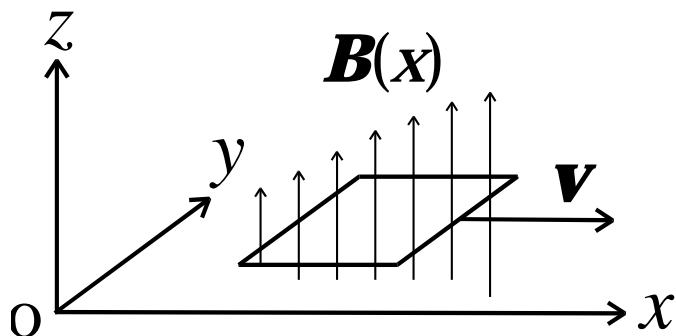
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = vaB(x_1) - vaB(x_3) = va(B(x_1) - B(x_3))$$

よって、この回路に生じる誘導起電力は、

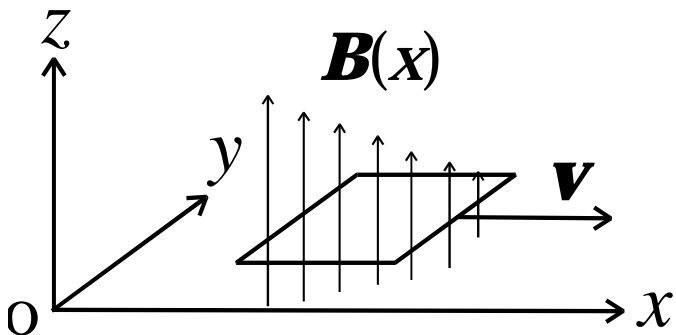
$$V = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

と表せる。

誘導起電力の向き (レンツの法則)



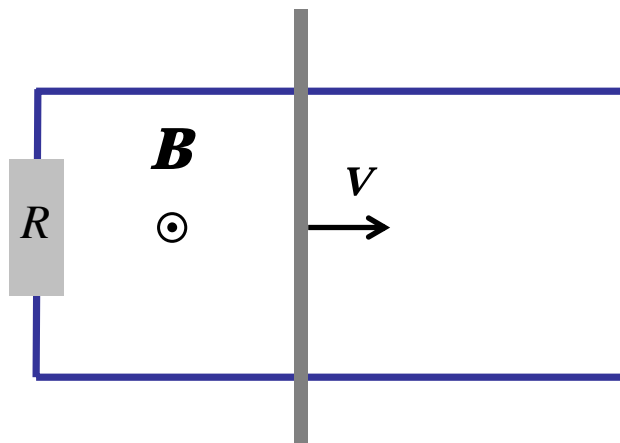
$\frac{\partial \Phi}{\partial t} > 0 \rightarrow V < 0 \rightarrow$ 電流は磁場に対して
右ねじの向きと逆に
流れる



$\frac{\partial \Phi}{\partial t} < 0 \rightarrow V > 0 \rightarrow$ 電流は磁場に対して
右ねじの向きに流れる

誘導起電力は、回路を貫く磁束の変化を打ち消す向きに生じる (レンツの法則)

誘導起電力が行う仕事の起源



単位時間あたりの回路を貫く磁束の変化量は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = vaB = V(\text{誘導起電力})$$

回路に流れる電流 I は

$$I = \frac{V}{R} = \frac{vaB}{R}$$

棒に働くローレンツ力は、

$$F = aBI = aB \cdot \frac{vaB}{R} = \frac{va^2 B^2}{R}$$

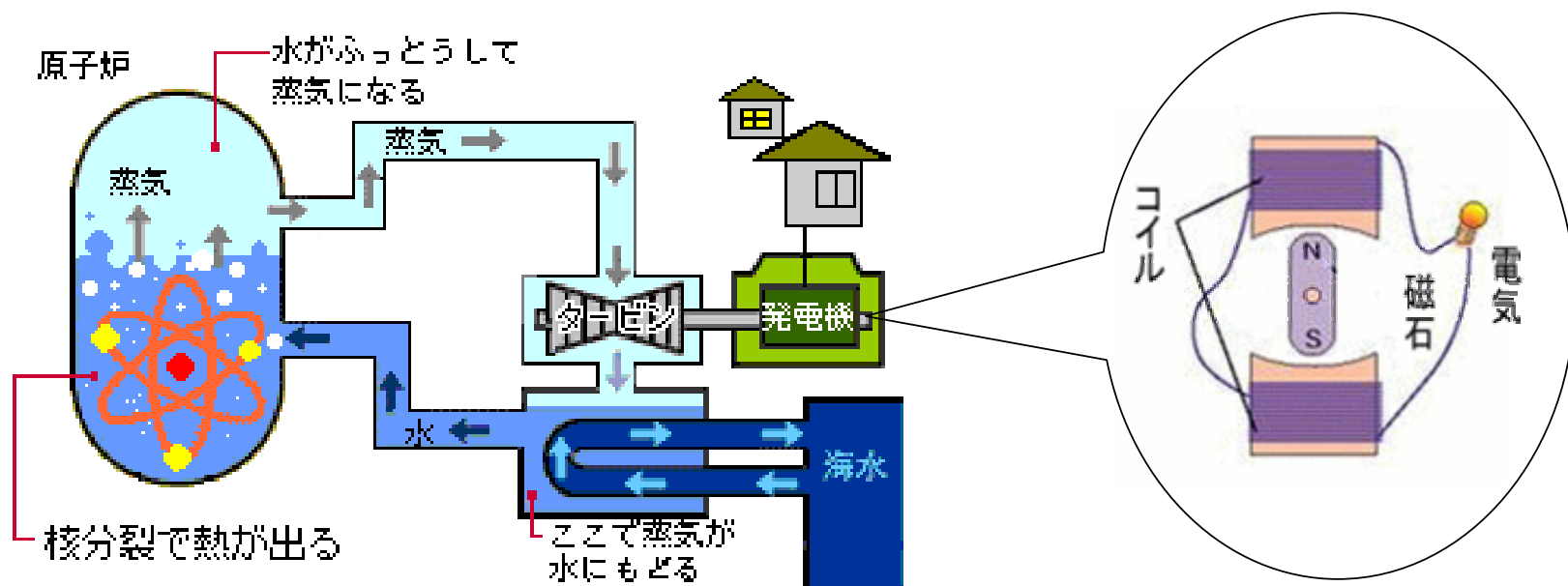
よって、棒をローレンツ力に抗して
速さ v で動かすために必要なパワーは、

$$P = Fv = \frac{(vaB)^2}{R}$$

よって、抵抗で消費される電力 P は

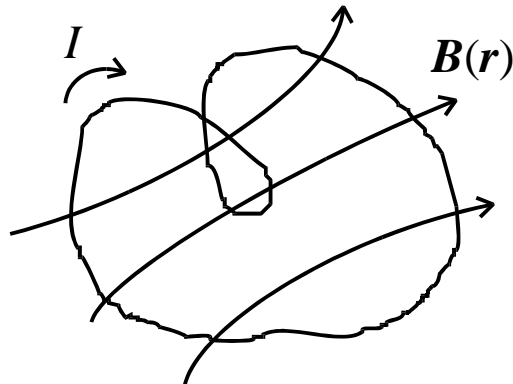
$$P = VI = \frac{(vaB)^2}{R}$$

(原子力) 発電の原理



電流回路の自己インダクタンス

電流回路が自分自身で生成する磁場(磁束)の変化も、その回路に誘導起電力を生じさせる(自己誘導)



電流回路が生成する磁場 $B(r)$ は、ビオ・サバールの法則より、回路に流れる電流 I に比例するので、回路を貫く磁束も、電流 I に比例する:

$$\Phi = LI$$

よって、回路に生じる誘導起電力は

$$V = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -L\frac{dI}{dt}$$

(L : 自己インダクタンス。単位は $\text{Wb/A}=\text{H}$ (ヘンリー))

ソレノイドコイルの自己インダクタンス

(第4章レポート問題1)

コイル一巻を貫く磁束は、

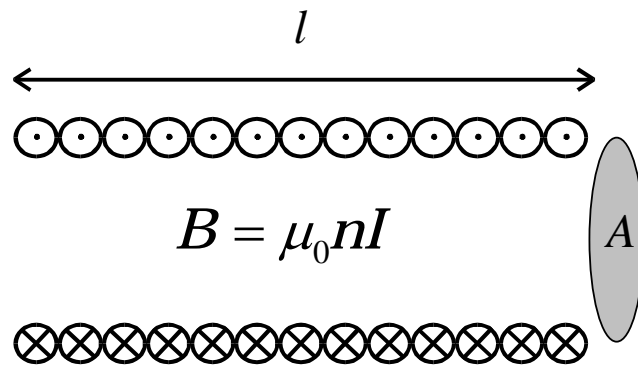
$$\Phi = AB = \mu_0 AnI$$

巻き数は nl なので、誘導起電力は、

$$V = -nl \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mu_0 An^2 l \frac{dI}{dt}$$

よって、ソレノイドコイルのインダクタンスは

$$L = \mu_0 n^2 Al = \mu_0 n^2 \times (\text{体積})$$



単位長さあたりの巻き数： n

コイルに流れる電流の時間変化

時刻 $t = 0$ にスイッチを入れる。

キルヒホッフの法則より

$$V - RI(t) - L \frac{dI(t)}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L} I(t) = \frac{V}{L}$$

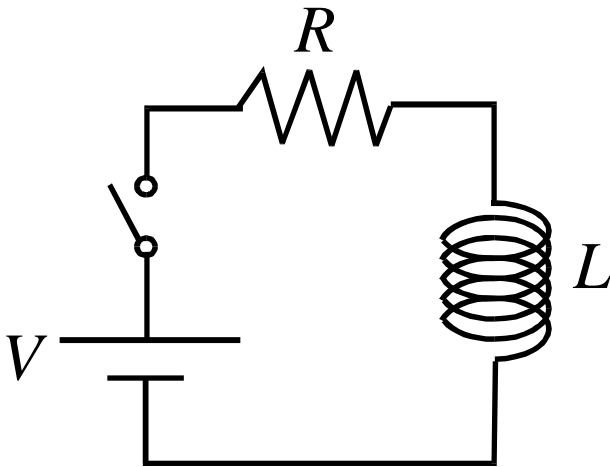
同次方程式 $\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L} I(t) = 0$ の解は

$$I'(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

また、特解は $I_p(t) = V/R$ なので、一般解は

$$I(t) = I'(t) + I_p = Ae^{-\frac{R}{L}t} + V/R$$

初期条件 $I(0) = 0$ より、 $I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$



コイルに蓄えられたエネルギー

コイルに流れる電流は、 $I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

コイルに生ずる誘導起電力は

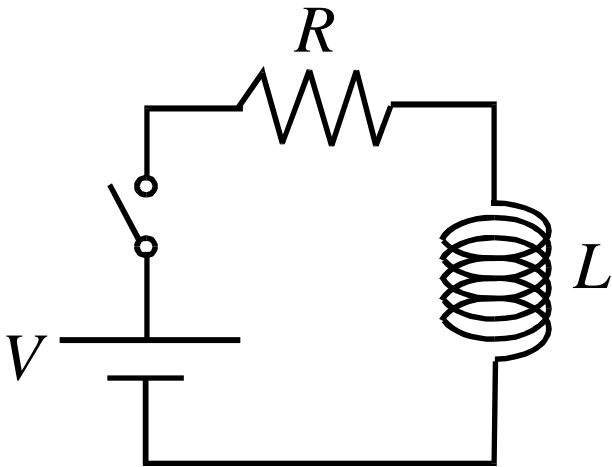
$$V_C(t) = L \frac{dI(t)}{dt} = Ve^{-\frac{L}{R}t}$$

したがって、コイルに蓄えられたエネルギーは

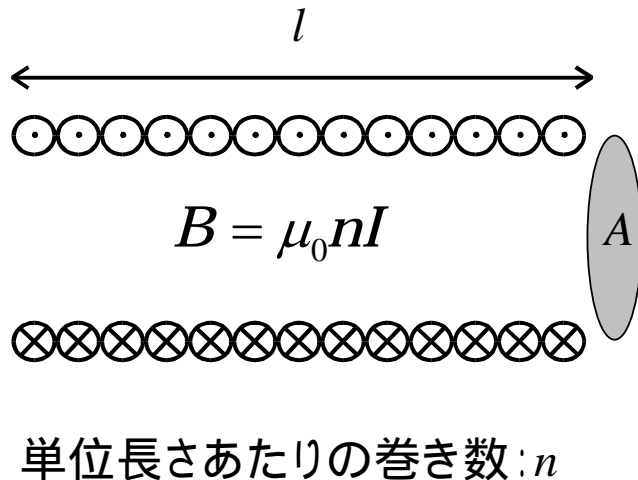
$$U = \int_0^{\infty} V_C(t)I(t)dt = \frac{V^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{R}{L}t} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) dt$$

$$= \frac{V^2}{R} \left[-\frac{L}{R} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{L}{2R} e^{-\frac{2R}{L}t} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} L \frac{V^2}{R^2} = \frac{1}{2} LI^2 \left(I \equiv I(\infty) = \frac{V}{R} \right)$$



磁場のエネルギー密度



ソレノイドコイルのインダクタンスは

$$L = \mu_0 n^2 A l = \mu_0 n^2 \times (\text{体積})$$

コイルに流れる電流は $I = \frac{B}{\mu_0 n}$

よって、コイルに蓄えられたエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 \times (\text{体積})$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0^{-1} B^2 \times (\text{体積})$$

↑
磁場のエネルギー密度と解釈できる

電場と磁場のエネルギー (まとめ)

電場のエネルギー密度

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

コンデンサーに蓄えられた
エネルギー

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV$$

磁場のエネルギー密度

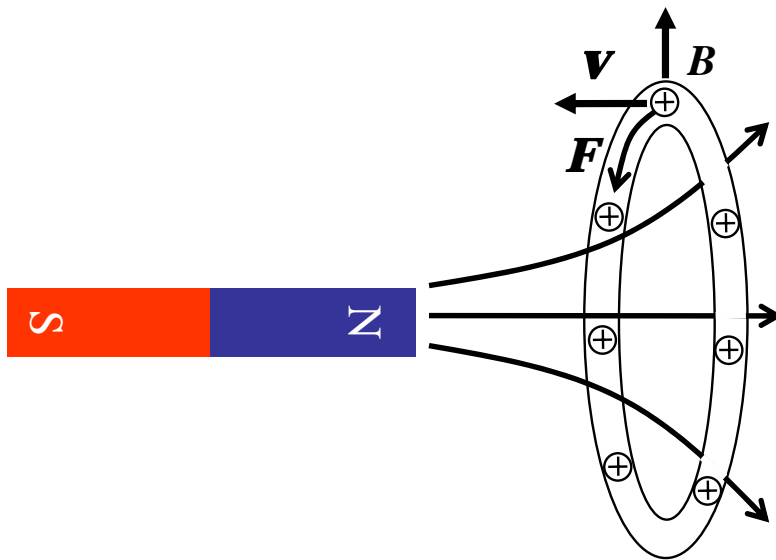
$$u = \frac{1}{2} \mu_0^{-1} B^2$$

コイルに蓄えられたエネルギー

$$U = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \Phi I$$

誘導起電力の起源

コイルが磁石に対して動く場合



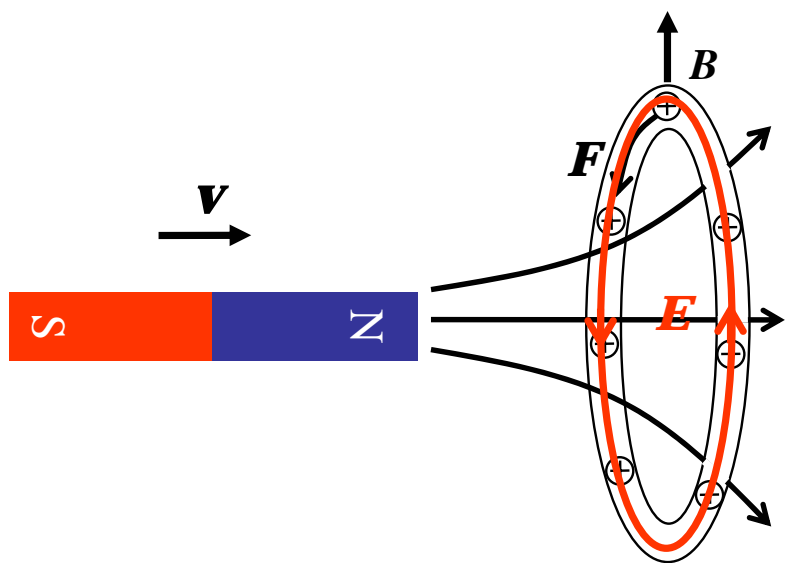
ローレンツ力 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$
をコイル内の電荷が受けて
電流が流れる。

誘導起電力 V は、

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= -\int_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

誘導起電力の起源

磁石がコイルに対して動く場合



コイル内の電荷は静止している
ので、磁場からのローレンツ力
は働かない。しかし、電荷には
力が働き電流が流れる



力(誘導起電力)の起源は電場
にあると考えざるを得ない。その電場
 $E(\mathbf{r})$ を誘導電場と呼び、これは

$$V = \oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S}$$

を満たしていなければならない。

電場の循環 (電磁誘導の法則)

磁場の時間変化が作る電場 (誘導電場) $E(r)$ は、電磁誘導の法則を満たす。

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S}$$

磁場の時間変化がない場合、電荷が作る電場 (クーロン電場) が満たすべき循環ゼロの法則に自然に帰着する

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (\text{クーロン電場の場合})$$

したがって、電磁誘導の法則は、電場が一般的に満たしている基本法則である。

マクスウェル方程式(まだ不完全)

時間変化する電磁場の基本方程式

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

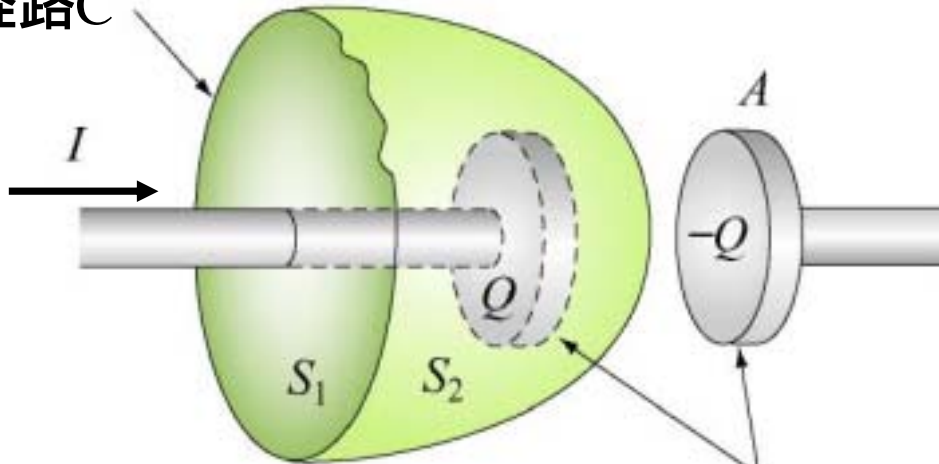
$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \leftarrow \text{ここが不完全}$$

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

アンペールの法則の問題点

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

経路C



コンデンサーの電極

曲面 S_1 をとれば

$$\mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I$$

曲面 S_2 をとれば

$$\mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

曲面の選びかたによって、右辺の値が異なる！

マックスウェルによる修正

あるベクトル場 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ において、

$$\int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

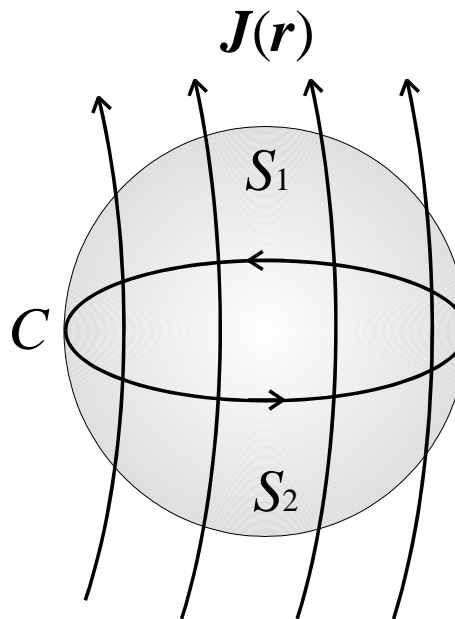
の値が経路 C を縁とする曲面 S の
選びかたに依らないならば、

$$\int_{S_1} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

であるので、

$$\int_{S_1} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_2} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{閉曲面 } S} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

つまり、任意の閉曲面 S における $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ の湧き出しはゼロでなければならない



マックスウェルによる修正(つづき)

残念ながら電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ の湧き出しは一般にゼロにならない(先のコンデンサーの場合が良い例)。しかし、電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ に関しては、電荷の保存則が成り立っている

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r})}{\partial t} dV$$

この式を移項してみると、

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r})}{\partial t} dV = 0$$

さらにガウスの法則 $\int_V \rho(\mathbf{r}) dV = \epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$ を利用すると

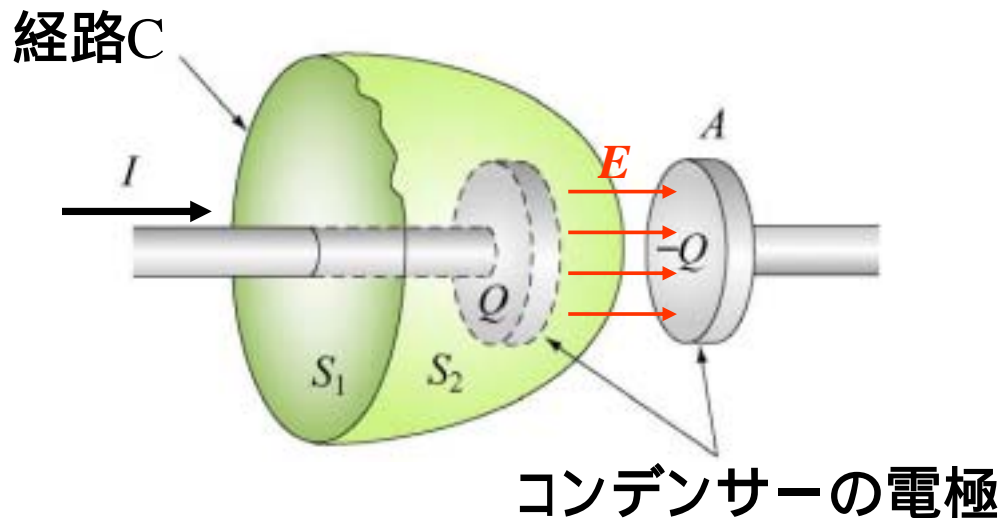
$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r})}{\partial t} dV = \int_S \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

湧き出しゼロのベクトル場！

修正されたアンペールの法則

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t}$: 変位電流 (displacement current)



マクスウェル方程式 (完全版)

時間変化する電磁場の基本方程式

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

マクスウェル方程式の微分形

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

真空中のマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t} \quad \left(c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

波動方程式の導出

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t} \quad \text{の両辺に左から } \nabla \times \text{ をかけると}$$

$$\text{左辺} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$$\text{右辺} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t} \right)$$

$$= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t^2}$$

$$\text{したがって } \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t^2} \quad \text{3次元波動方程式}$$

波動方程式の導出

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t} \text{ の両辺に左から } \nabla \times \text{ をかけると}$$

$$\text{左辺} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \frac{1}{c^2} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\text{したがって } \Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t^2} \quad \text{3次元波動方程式}$$

波動方程式の解

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$$

成分をあからさまに書けば

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{pmatrix} E_x(\mathbf{r}, t) \\ E_y(\mathbf{r}, t) \\ E_z(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} E_x(\mathbf{r}, t) \\ E_y(\mathbf{r}, t) \\ E_z(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$$

電場はy軸方向を向いている (y軸方向に偏光している) とする

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_y(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_y(\mathbf{r}, t)$$

$$E_x(\mathbf{r}, t) = E_z(\mathbf{r}, t) = 0$$

ところで、マックスウェル方程式 $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ より

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial y} E_y(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial z} E_z(\mathbf{r}, t) = 0$$

であるので、これと $E_x(\mathbf{r}, t) = E_z(\mathbf{r}, t) = 0$ より、必然的に

$$\frac{\partial}{\partial y} E_y(\mathbf{r}, t) = 0$$

となる。したがって、 y 軸方向を向いた電場の波は、 y 軸方向には空間依存性がない。つまり、電場の波は y 軸方向に進行できない



電磁波は横波

電場の波は $+x$ 軸方向に進行しているとする(z 軸方向の空間依存性はないとする)と、波動方程式は1次元に帰着できる

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_y(x, t)$$

一般的な解の形は $E_y(x \pm ct)$ と表せるが、振動する解は

$$E_y(x, t) = E \cos(kx - \omega t) \quad \text{ただし} \quad c = \frac{\omega}{k} = \lambda f$$

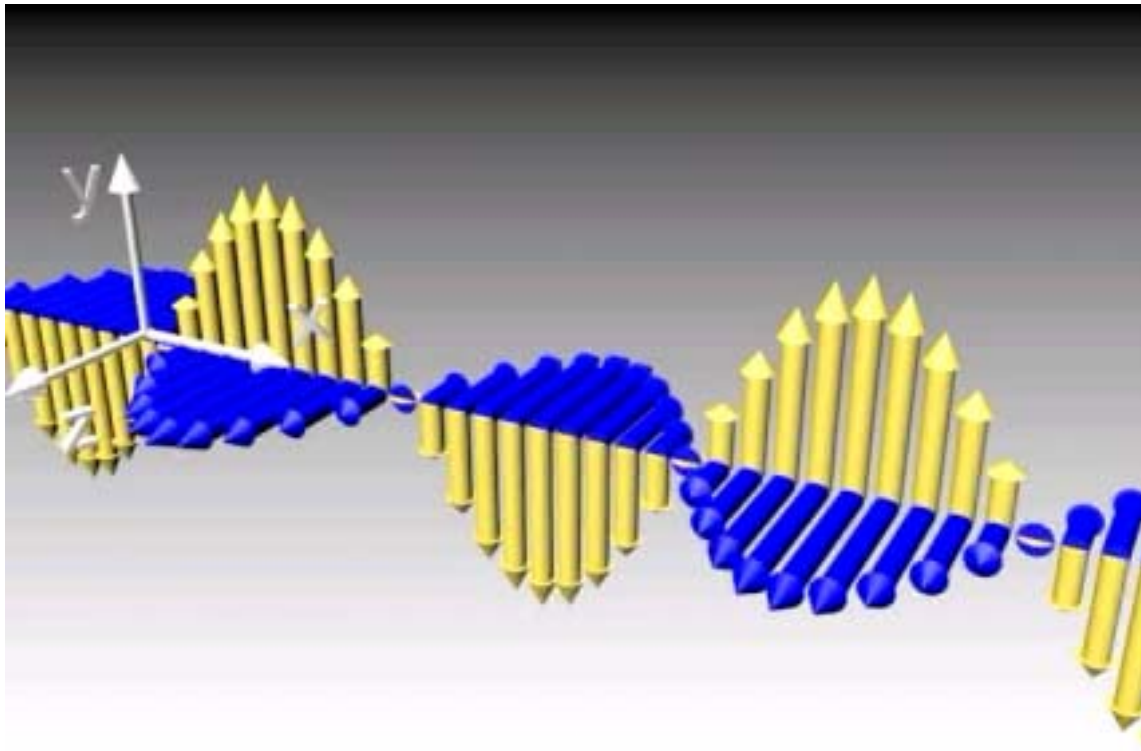
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{: 波数} \quad \omega = 2\pi f \quad \text{: 角周波数}$$

(λ : 波長、 f : 周波数)

対応する磁場の解は

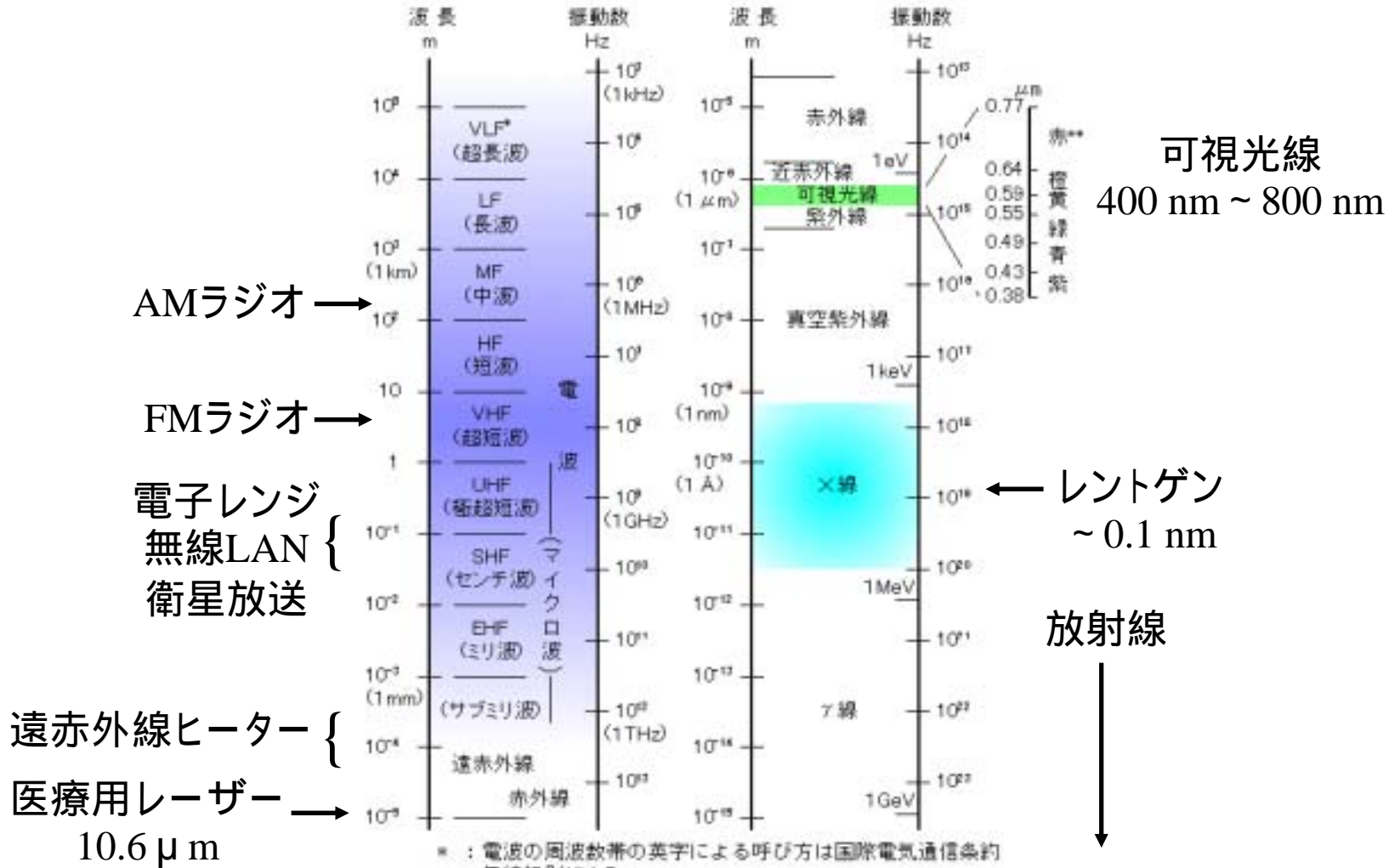
$$B_z(x, t) = B \cos(kx - \omega t) \quad \text{ただし} \quad B = E/c$$

+ x 方向に進行する電磁波



<http://web.mit.edu/8.02t/www/>

表1 電磁波の波長と振動数



* : 電波の周波数帯の英字による呼び方は国際電気通信条約無線規則による。
 **: 可視光線の限界ならびに色の境界には個人差がある。

この講義の目標

電磁気学の基本法則の理解

時間変化しない電磁場 (静電場、静磁場)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \quad (\text{ローレンツ力})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} dV' \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV & (\text{電場のガウスの法則}) \\ \oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 & (\text{循環ゼロの法則}) \end{cases}$$

(クーロンの法則)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dV' \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} & (\text{アンペールの法則}) \\ \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0 & (\text{磁場のガウスの法則}) \end{cases}$$

(ビオ - サバールの法則)

時間変化する電磁場

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}))$$

$$\epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

これらの基本法則は、その意味も含めて、すべて覚えましょう

この講義の目標

電磁現象の定性的理解

- ・車の中は落雷に対して安全である(静電遮蔽)
- ・ウランが核分裂で放出されるエネルギーは原子核の静電エネルギー(原子力エネルギーはウランの場合、実は電気エネルギー)
- ・磁気力とは、クーロン力と相対論的効果の現れである(磁気力は座標系によってはクーロン力とみなせる)
- ・光は電磁場である

みんな理解できましたか？