

フェルミ問題のすすめ

東京大学大学院総合文化研究科 鳥井寿夫

「シカゴにピアノの調律師は何人いると思うか？」これは物理学者のフェルミ（1901 - 1954）がシカゴ大学で物理学を学ぼうとする初学年の学生に対して出した問題です。このような一見とらえどころのない問題は「フェルミ問題」もしくは「フェルミ推定」と呼ばれています。フェルミがこのような問題を学生に投げかけた意図は何だったのでしょうか。

物理を学ぶ学生にとって、物理という教科は「膨大な公式の集合」のように映っているかもしれません。実際には、物理における基本法則の数は少数で、いわゆる公式と呼ばれるものの多くは、基本法則からいつでも導けるものや、物理量の定義に過ぎないのですが、何れにせよ、「物理 = 公式集」というイメージは強いのではないのでしょうか。

ニュートンの運動の3法則やクーロンの法則などの基本法則は、確かに物理の骨格をなす重要なものです。しかし、それらの法則を暗記したところで、実生活に直ちに役立つわけではありません。我々の身の回りの諸現象は、その根底には物理の基本法則があるのですが、法則性が顕になっている例はほとんどありません。物理が「机上の空論」のように思われても不思議ではありません。

冒頭の「フェルミ問題」に話を戻します。フェルミが伝えたかったメッセージは、「物理 = 公式集」ではなく、「未知の問題に出合ったら、自分でモデル（仮説）を立てて見当をつけよ」とか「ものごとを数量化して考えよ」ということだと思います。もっと端的に言えば「物理学者が実際にするのと同じように推論せよ」ということでしょう。物理を学ぶ理由は、まさしくここにあります。物理の基本法則を知らなければ、確かに問題を解くことはできませんが、それだけでは物理の学習としては不十分なのです。

「フェルミ問題」は、外資系企業の採用試験に用いられることもあり、その認知度は日本でも高まってきているようです。ここで、ひとつの例をご紹介します。ハーバード大学の物理学者エリック・マズールが、物理教育に関する著書¹で取り上げている例です。

土曜日の午後、商店街近くの駐車場に車を止めようとしたが、あいにく満車だった。そこで駐車場の入り口近くで駐車場が空くのを待つことにした。駐車場には20台の車が止まっている。駐車場が空くまでに、どのくらいの時間待たねばならないか。

これは実際にマズールが遭遇した事例で、彼は3分と見積もって、実際に3分程で駐車場は空いたそうです。この問題を見て、典型的な物理の問題に慣れた学生は「この問題文からは答えが求められない」と言って、それ以上考えることはしないでしょう。しかし現実社会は、このように答えが一意に決まらない問題で溢れており、それらに立ち向かうための能力と自信をつけさせてあげることが物理教育の重要な目的の一つなのです。

マズールは、フェルミ問題を解く際に必要とされる手順を次の4つに分解しています。

- (a) 仮説を立てること (make assumptions)
- (b) 値を見積もること (make estimates)
- (c) モデルを立てること (develop a model)
- (d) モデルを解くこと (work that model out)

実際は全てのフェルミ問題が (a) (d) の順番できれいに解けるわけではありませんが、「仮説」、「見積もり」、「モデル化」はフェルミ問題を解くための重要な要素です。最後の「(d) モデルを解くこと」が物理の能力と思われがちですが、それはほとんど数学の能力であって (それも大切なのですが)、本来の物理的思考力とはあまり関係がありません。

では実際に、このフェルミ問題を解いていきましょう。土曜日の午後、つまり典型的な店の営業時間の中ほどですから、既にお買い物を終えて駐車場から出ていく車の台数と、その空いたスペースに入ってくる車の台数の時間平均が一定であると仮定します (手順(a))。開店直後の時間帯なら、車は駐車場に入ってくる一方なので、この仮定は正しくないでしょう。さて、出ていく (入ってくる) 車の台数の時間平均を I と置きましょう。ここで「(b) 値を見積もること」を通り越して、先に

「(c)モデルを立てること」に進みます。横軸に時刻 t 、縦軸に時刻 t までに駐車場に入ってきた車の累積台数 $A(t)$ および出ていった車の累積台数 $D(t)$ をプロットしてみると、図のように傾き I の2本の平行な直線が引かれます。実際は、グラフは階段状のはずですが、それを直線で近似する粗視化もモデル化の際には極めて有効です。さて、ある時刻に着目したときの $A(t)$ と $D(t)$ の差 L が駐車場の車の台数であることは明らかでしょう。

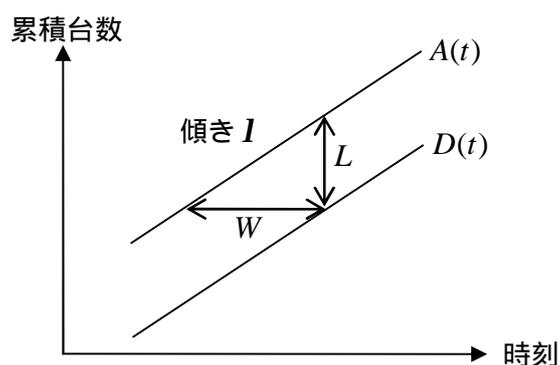


図 駐車場に入ってきた車の累積台数 $A(t)$ と出ていった車の累積台数 $D(t)$ の時間変化

一方、車の平均駐車時間 (つまり商店街で買い物をする平均時間) W は $A(t)$ と $D(t)$ の横方向の差 (特定の1台に着目したときの差) に対応します。従って、グラフより公式

$$L = IW \quad (1)$$

が導かれます (これは行列の長さ待ち時間の関係を表す有名な「リトルの公式」です)。これで手順(c)が完了しました。この段階で、 I を求めるには W を見積もらねばならないこと、つまり手順(b)に戻る必要があることがわかりました。さて、商店街で買い物をする平均時間 W はどれくらいでしょうか。物理の問題なら、理科年表や過去の文献に頼ることもできますが、ここでは我々の経験 (常識) に頼るしかありません。その商店街の規模にも依るでしょうが、マズールは2時間と見積もりました。これでとうとう手順(d)に進むことができます。公式(1)に $L = 20$ 台、 $W = 2$ 時間を代入すると、 $I = L/W = 10$ 台/時間

と求まります。1 時間に 10 台ですから、6 分に 1 台の割合で車が駐車場から出て行くことになります。マズールは車が時間的に等間隔で駐車場を出て行くと考えて、待ち時間の期待値として 3 分を導いたのです（車が出ていく時刻が等間隔ではなく、放射線のカウンタのようにランダムである、つまりポアソン過程であると仮定すれば、待ち時間の期待値が $1/I = 6$ 分となることが数学的に示されますが、そこまで厳密に考える必要はないでしょう）。

さて、我々は既に公式 (1) を知ってしまいました。その上で以下の問題を見せられたらどうでしょう。

土曜日の午後、客の買い物時間が平均 2 時間である商店街の近くの駐車場に車を止めようとしたが、あいにく満車だった。そこで駐車場の入り口近くで駐車場が空くの待つことにした。駐車場には 20 台の車が止まっている。駐車場が空くまでに、どのくらいの時間待たねばならないか。

最初の問題と比べて、付け加わったのは「客の買い物時間が平均 2 時間である」という文章だけです。フェルミ問題としての難易度はそれほど変化していないはずですが、既に公式 (1) を知ってしまった我々は、直ちに $L = 20$ 台、 $W = 2$ 時間であることを見抜き（もしくは推測し）、公式に値を代入して答えを得るでしょう。そこで我々が行うのは手順 (4) のみで、物理で重要な能力とされる手順 (a) ~ (c) を完全にスキップするでしょう。教科書の章末問題にあるような典型的な物理の問題は、往々にして手順 (d) の能力を問うのみで、物理的思考力を養う機会を奪っているとマズールは警告しています。

それでは、全ての物理法則をフェルミ推定によって学生に導出させるべきかと言うと、そうではありません。そもそも物理の基本法則は、人類の長い歴史（と言っても主にガリレオやニュートンが活躍した 17 世紀以降）の中で先人の非凡な観察眼によって見出されてきた経験則であり、基本法則の概念的理解は、日常経験に起因する誤概念に染まっている学生にとっては困難な作業です²。基本法則の教授法はある程度天下りの的にならざるを得ませんが、例えば先に紹介したマズールの著書では、コンセプテスト (ConceptTest) と呼ばれる物理の概念を問う選択問題を学生に提示し、（正解を教える前に）学生同士で議論させることで、概念理解が向上すると報告しています。基本法則の概念理解と、フェルミ問題で問われるような「仮説をもとにモデルを立てて見当をつける」能力は、お互いを補強するように同時平行で養うのがよいでしょう。物理教育とは、何ともチャレンジングな仕事です。

最後に表記法についてコメントします。大学に入ってくるほとんどの学生が、 $x = 1(\text{cm})$ のように単位の括弧に入れて書くのに驚かされます。「単位」は英語では「unit (ユニット)」と呼び、次元のある物理量は「unit 何個分か」、つまり無次元の数値 \times unit で表現します。表記法としては、掛け算を表す「 \times 」を空白で表すことが国際的なルールになっています。つまり正しくは $x = 1(\text{cm})$ ではなく $x = 1\text{cm}$ と書かねばなりません。この表記法の例外とな

るような単位はありません。 x や a などの文字自体は物理量そのものを表すので、単位が含まれていると考えねばなりません(グラフの軸ラベルや表の項目名では x (cm) や a (m/s²) のように単位を括弧に入れる場合がありますが、これはグラフの目盛や表の値にいちいち単位をつけるのが煩雑なので、「この単位を省略しています」という注釈の意味なのです)。先のフェルミ問題の例では、 $W = 2$ 時間 = 120 分、 $I = 10$ 台/時間 = 0.17 台/分が正しい表記法です。ここで 10 台/時間 0.17 台/分のように近似を意味する記号「 \approx 」を用いなかったことに注意してください。そもそもフェルミ問題では、各物理量の有効数字は 1 桁程度です。 $10/60 = 0.166666\dots$ 0.17 は数学としては正しい表現ですが、物理としては計算結果の 1 桁目もしくは(特に最初の数値が 1 の場合は)2 桁目しかそもそも意味を持ちません。従って $I = 10$ 台/時間 = 0.17 台/分が正しい表記法で、ここに近似の概念は入ってこないのです。割り算をして割り切れないからといって、有効数字の桁数が代入する物理量のそれを上回ることはありません(掛け算の場合も同様です)。物理量の不確かさの概念は学生には理解しにくいかも知れませんが、社会に出れば重要な科学リテラシーの 1 つです。何か具体的に物理量を計算するときには、その単位のみならず、不確かさも常に意識するように指導したいものです。

¹ Eric Mazur, Peer Instruction: A User's Manual (Prentice Hall, 1997).

² Edward F. Redish, Teaching Physics with the Physics Suite (Wiley, 2003). [翻訳「科学をどう教えるか：アメリカにおける新しい物理教育の実践」(丸善出版、2012)]